线性代数-11

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 13 日

本次课内容

1. 向量组的线性表示

2. 向量组的线性相关性

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式，

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.$$

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块，

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式，

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta.$$

  - 向量组：若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合. 例如 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组, 记为 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \beta_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

  - 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.
    例如 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组,
    记为 $A : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.
  - 线性组合: 形如

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

的表达式称为向量组 A 的一个线性组合.

向量的线性表示

- 若
$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
则称向量 β 可由向量组 A 线性表示.
- β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$ 有解

向量的线性表示

- 若
$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
则称向量 β 可由向量组 A 线性表示.
- β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$ 有解
$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

- 若
$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
则称向量 β 可由向量组 A 线性表示.
- β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X_n = \beta$ 有解
$\Leftrightarrow R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) = R(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.

定理 (定理 1)

向量 β 可由向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.

注：任意有序的向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都对应矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. 为方便，我们把矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 也记为 A.

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 β_i 都可由向量组 A 线性表示

向量组的线性表示

- 向量组 $B: \beta_1, \cdots, \beta_m$ 可由向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 β_i 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)X = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 有解

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 β_i 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$.

定理 (定理 2)

向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
$\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$.

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示，则称向量组 A, B 等价.

推论

向量组 $B: \beta_1, \cdots, \beta_m$ 和向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 等价
$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$.

例

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

证明向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，并求出表达式.

解法：求解线性方程组 $AX = \beta$,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

例 2

例

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

证明向量组 α_1, α_2 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价.

解法：证明矩阵方程 $AX = B$ 有解,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

控" 秩" 定理

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 有解
$\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$

控" 秩" 定理

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 有解
$\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
$\Rightarrow R(B)\leq R(A,B)=R(A)$.

控" 秩" 定理

- 向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
  $\Rightarrow R(B)\leq R(A,B)=R(A)$.

定理 (定理 3)

向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示
$\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.

例 (例 3)

设 n 维向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, n 阶单位矩阵 $E=(e_1,\cdots,e_n)$ 的列向量称为单位坐标向量.
证明 $e_1,\cdots,e_n$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

例 3

例 (例 3)

设 n 维向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, n 阶单位矩阵 $E=(e_1,\cdots,e_n)$ 的列向量称为单位坐标向量.
证明 $e_1,\cdots,e_n$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

注:

- 矩阵描述: 存在矩阵 K, 使得 $AK=E_n \Leftrightarrow R(A)=n$;
- 矩阵方程描述: $AX=E$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定义

给定向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = O,$$

则称向量组 A 线性相关.

若仅当 $k_1 = \cdots = k_n = 0$ 时, $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = O$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

线性相关性

定义

给定向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时，$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O$ 才成立，则称向量组 A 线性无关.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow A_{m\times n}X_n=O$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow A_{m\times n}X_n=O$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定义

给定向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时，$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O$ 才成立，则称向量组 A 线性无关.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow A_{m\times n}X_n=O$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow A_{m\times n}X_n=O$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定理 (定理 4)

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<n$;
向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

例 4

例

讨论 n 维单位坐标向量 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性相关性.

例

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

讨论向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和向量组 α_1, α_2 线性相关性.

例 6

例

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 & = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 & = \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例 6

例

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 & = \alpha_1+\alpha_2 \\ \beta_2 & = \alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_3 & = \alpha_3+\alpha_1 \end{cases}$$

证向量组 β_1,β_2,β_3 线性无关.

证明 1: 设有 x_1,x_2,x_3 使得

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=O$$

$$\underline{\cdots\cdots}$$

得 $x_1=x_2=x_3=0$. 故 β_1,β_2,β_3 线性无关.

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B: \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m > n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，$B: \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX = \beta$, $R(A, \beta) = R(A) = m$，A 列满秩，则有唯一解.

定理 5

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX=\beta$, $R(A,\beta)=R(A)=m$，A 列满秩，则有唯一解.

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则向量组 $B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$B:\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX=\beta$，$R(A,\beta)=R(A)=m$，A 列满秩，则有唯一解.

例 7

例

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，证明：

- α_1 可由 α_2, α_3 线性表示；
- α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

线性相关的判定

- 向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$ 使得
$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O,$$
$\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n=O$ 有非零解
$\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的秩小于列向量的个数，$R(A)<n$
$\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

线性无关的判定

- 向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关
  $\Leftrightarrow$ 若 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=O$, 则必有
  $$k_1=\cdots=k_n=0$$
  $\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n=O$ 只有零解
  $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的秩等于列向量的个数, $R(A)=n$, 列满秩
  $\Leftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

小结

第二、三两章是用矩阵语言来描述线性方程组，而这一章是用向量语言 (几何语言) 来描述线性方程组和矩阵.

- 向量组、线性组合、线性表示、向量组的等价、线性相关和线性无关;
- 判断是否可以线性表示、是否等价、是否线性相关和线性无关.
- 5 个定理: 联系线性方程组解的存在性和秩的关系.

作业

- Page109-Page110: 2, 4, 8, 9.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 13 日