

线性代数-14

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 20 日

本次课内容

1. $AX = 0$ 的解的结构
2. $AX = \beta$ 的解的结构

齐次线性方程组解的结构

$$AX = 0 \quad (1)$$

的全体解 $S = \{X \mid AX = 0\}$ 构成一个向量空间. 即 S 对向量加法和数乘运算封闭:

- 若 $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$, 则 $A(\xi_1 + \xi_2) = 0$;
- 若 $A\xi = 0$, 则对任意 $k \in \mathbb{R}$, $A(k\xi) = 0$.

- 设 S 为 $AX=0$ 的解空间, $S_0: \xi_1, \dots, \xi_t$ 为 S 的一个基. 则

$$X = k_1\xi_1 + \dots + k_t\xi_t, \forall k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$$

为 $AX=0$ 的通解.

- 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的一组基称为该方程组的一个基础解系.

- 设 S 为 $AX=0$ 的解空间, $S_0: \xi_1, \dots, \xi_t$ 为 S 的一个基. 则

$$X = k_1\xi_1 + \dots + k_t\xi_t, \forall k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$$

为 $AX=0$ 的通解.

- 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的一组基称为该方程组的一个基础解系.
- $t = R_{S_0} = \dim S = n - R(A)$, 其中 n 为未知量个数, A 为系数矩阵.

基础解系

- 设 S 为 $AX=0$ 的解空间, $S_0: \xi_1, \dots, \xi_t$ 为 S 的一个基. 则

$$X = k_1\xi_1 + \dots + k_t\xi_t, \forall k_1, \dots, k_t \in \mathbb{R}$$

为 $AX=0$ 的通解.

- 齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间的一组基称为该方程组的一个基础解系.
- $t = R_{S_0} = \dim S = n - R(A)$, 其中 n 为未知量个数, A 为系数矩阵.

定理 (定理 7)

$R(A_{m \times n}) = r$, 则 $AX=0$ 的解空间 S 的维数 $\dim S = n - r$.

例 (例 22)

求

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

求解步骤:

1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
4. 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 基础解系的取法并不唯一.
- 取阶梯列外的对应未知量为自由未知量, 方便表示阶梯列对应未知量.
- 自由未知量取值也不唯一. 但取自由未知量的其中一个为 1, 其余为 0, 更容易计算基础解系.

例 23

例

设 $A_{m \times n} B_{n \times l} = O$, 证明 $R(A) + R(B) \leq n$.

例 24

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.

例 24

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.

- 设矩阵 A, B 同型, 则

$$AX=0 \text{ 和 } BX=0 \text{ 同解} \Rightarrow R(A) = R(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

例 24

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.

- 设矩阵 A, B 同型, 则

$$AX=0 \text{ 和 } BX=0 \text{ 同解} \Rightarrow R(A) = R(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

$$A \overset{r}{\sim} B \Rightarrow AX=0 \text{ 和 } BX=0 \text{ 同解} \Rightarrow R(A) = R(B)$$

例 25

例

证明 $R(A^T A) = R(A)$.

非齐次线性方程组解的结构

$$AX = \beta \quad (2)$$

性质

1. 若 $A\eta_1 = \beta, A\eta_2 = \beta$, 则 $A(\eta_1 - \eta_2) = 0$.
2. 若 $A\eta = \beta, A\xi = 0$, 则 $A(\eta + \xi) = \beta$.

- 若 $A\eta^* = \beta$ (此时, $X = \eta^*$ 称为 $AX = \beta$ 的**特解**), ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系, 则非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的通解为

$$X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

- $AX = \beta$ 的通解 $\Leftrightarrow AX = 0$ 的通解 + $AX = \beta$ 的一个特解.

例 (例 26)

求解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

求解步骤:

1. 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \beta$ 得到一个特解 η^* ;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
5. 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 特解的取法并不唯一，但取自由未知量全为 0，更容易计算.
- 基础解系的取法并不唯一.
- 取阶梯列外的对应未知量为自由未知量，方便表示阶梯列对应未知量.
- 自由未知量取值也不唯一. 但取自由未知量的其中一个为 1，其余为 0，更容易计算基础解系.

补充：计算机如何求解线性方程组-LU 分解

例
求解

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

算法步骤:

1. LU 分解: 将系数矩阵 A 表示为一个单位下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积,

$$A = LU,$$

2. 令 $Y = UX$, 解 $LY = \beta$.
3. 解 $UX = Y$.

- 求解 $AX = 0$;

求解步骤:

1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
4. 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

- 求解 $AX = \beta$

求解步骤:

1. 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \beta$ 得到一个特解 η^* ;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} ;
5. 得通解 $X = k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$.

齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = 0$	$A_{m \times n}X_n = 0$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$
是否有非零解?	$R(A) < n?$	向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性相关?
有非零解	$R(A) < n$	线性相关
有唯一零解	$R(A) = n$	线性无关

● $AX = 0$ 的通解

$$X = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$

其中 $r = R(A)$.

非齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$A_{m \times n}X_n = \beta_m$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$
是否有解?	$R(A, \beta) = R(A)$?	β 由向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性表示?
无解	$R(A, \beta) > R(A)$	No
有解	$R(A, \beta) = R(A)$	Yes
有唯一解	$R(A, \beta) = R(A) = n$ A 列满秩	Yes, 且表示唯一
有唯一解 ($m = n$)	$R(A, \beta) = R(A) = n$ A 可逆	Yes, 且表示唯一
有无穷解	$R(A, \beta) = R(A) < n$	Yes, 且表示不唯一

● $AX = \beta$ 的通解

$$X = k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall k_1, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

- Page112-Page113: 28、30、31-1、35
- (27 与下题, 二选一) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2)_{n \times 2}$, β_1, β_2 齐次线性方程组 $A^T X = 0$ 的一个基础解系, 令 $B = (\beta_1, \beta_2)_{n \times 2}$.
证明: α_1, α_2 为 $B^T X = 0$ 的解向量.

欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 20 日