线性代数-15

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 21 日

本次课内容

1. 正交向量组

2. Schmidt 正交化

3. 正交矩阵和正交变换

正交向量组

- 内积
$$[X, Y] = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $[X, Y] = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组：一组两两正交的非零向量.

- 内积
$$[X, Y] = X^T Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
- 若 $[X, Y] = 0$, 则称向量 X, Y 正交. 零向量与任何向量都正交.
- 正交向量组：一组两两正交的非零向量.

定理 (定理 1：正交向量组必线性无关)

若 n 维向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

例 (例 1)

已知

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

正交. 求一个非零向量 α_3 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

标准正交基的定义

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $e_1, \cdots, e_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量，如果

- $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交;
- $e_1, \cdots, e_r$ 都为单位向量,

则称 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基.

定义 (标准正交基)

设 n 维向量 $e_1, \cdots, e_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量，如果

- $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交;
- $e_1, \cdots, e_r$ 都为单位向量,

则称 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基.

定义 (正交基)

设 n 维向量 $e_1, \cdots, e_r$ 为向量空间 $V(V \subseteq \mathbb{R}^n)$ 的向量，如果

- $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组基 (最大无关组);
- $e_1, \cdots, e_r$ 两两正交,

则称 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组正交基.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\beta = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

例子

例

设 $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基，求 $\beta = (1,2,3)^T$ 在这组基下的坐标.

- 设 $e_1, \cdots, e_r$ 为 V 的一组标准正交基，

$$\alpha = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in V$$

  则 $[\alpha, e_i] = [\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r, e_i] = \lambda[e_i, e_i] = \lambda_i$.

- 如何得到向量空间的标准正交基？

Schmidt 正交化：从一般基得到正交基的算法

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为向量空间 V 的一组基，

- 正交化 (Schmidt 正交化)：

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1, \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1, \\
&\cdots \\
\beta_r &= \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1},
\end{aligned}$$

- 单位化：

$$e_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}, e_2 = \frac{\beta_2}{||\beta_2||}, \cdots, e_r = \frac{\beta_r}{||\beta_r||}.$$

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k=1,\cdots,r$, 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 等价. 特别地，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价.

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k = 1, \cdots, r$, 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_k$ 等价. 特别地，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 等价.

- 两个向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow$ A, B 可以相互线性表示.

性质

在 Schmidt 正交化过程中，对任意 $k=1,\cdots,r$, 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_k$ 等价. 特别地，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价.

- 两个向量组 A,B 等价 $\Leftrightarrow$ A,B 可以相互线性表示.

推论

正交向量组是线性无关向量组; 反之, 线性无关向量组可以 Schmidt 正交化为正交向量组.

例 2

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 用 Schmidt 正交化把这组向量标准正交化.

例

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 求一组非零向量 α_2, α_3, 使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交.

定义 (定义 4：正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^TA = E \ \ (i.e.\ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为正交矩阵，简称正交阵.

定义 (定义 4：正交矩阵)

若 n 阶矩阵 A 满足

$$A^T A = E \ \ (i.e.\ A^{-1} = A^T),$$

则称 A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 矩阵 A 为正交矩阵当且仅当 A 的列 (行) 向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.
- 正交矩阵的逆矩阵和转置矩阵也是正交矩阵.
- 正交矩阵的行列式为 ± 1.
- 正交矩阵的乘积也是正交矩阵.

例 4

例

验证矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

为正交矩阵.

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T\alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

证明 H 为对称阵，且 $HH^T = E$.
所以 H 为一个正交矩阵.

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下,

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换，则有

$$Y=AX.$$

例 (Lecture-5：线性变换和矩阵)

给定一个 n 维向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 取线性变换如下，

$$\begin{cases} y_1 = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ & \cdots \\ y_n = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

则得 n 维向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示上面线性变换，则有

$$Y=AX.$$

- 线性变换和 n 阶方阵一一对应.

正交变换

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵，则线性变换 $Y = PX$ 称为正交变换.

定义 (定义 5)

若 P 为正交矩阵，则线性变换 $Y = PX$ 称为**正交变换**.

- 正交变换保持内积不变.

$$[PX, PY] = (PX)^T PY = X^T P^T PY = X^T Y = [X, Y]$$

- 正交变换保持长度不变.
- 正交变换保持夹角不变.

例 (Lecture-5)

设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T\alpha = 1$,

$$H = E - 2\alpha\alpha^T.$$

则 $H^T = H$, 且 $HH^T = E$. 则 $Y = HX$ 是一个正交变换 (称为镜面反射).

补充：线性变换的严格定义

定义

设 $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个变换 (自身到自身的映射). 若满足

- $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, $\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$;
- $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R}$, $\rho(k \cdot X) = k \cdot \rho(X)$,

则称 ρ 是一个线性变换.

取定向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 设

$$\rho(\xi_i)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\alpha_i,\quad i=1,\cdots,n$$

则对 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\gamma=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n=(\xi_1,\cdots,\xi_n)X$,

$$\begin{aligned}\rho(\gamma)&=\rho(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)\\&=x_1\rho(\xi_1)+\cdots+x_n\rho(\xi_n)\\&=(\xi_1,\cdots,\xi_n)(x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n)\\&=(\xi_1,\cdots,\xi_n)AX\\&:=(\xi_1,\cdots,\xi_n)Y\end{aligned}$$

所以线性变换在基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 下可以用 $Y=AX$ 表示.

设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的另外一组基. 设从基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 到基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的基变换公式为

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)P,$$

其中 P 可逆，称为过渡矩阵.
则

$$\gamma=(\xi_1,\cdots,\xi_n)X=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P^{-1}X:=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X'$$

$$\rho(\gamma)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)Y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P^{-1}Y:=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y'$$

从而由 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)AX=(\xi_1,\cdots,\xi_n)Y$ 知

$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)P^{-1}APX'=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P^{-1}PY'=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y'$$

所以线性变换在基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 下可以用 $Y'=P^{-1}APX'$ 表示.

综上: 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是同一个线性变换 ρ 在不同基下的矩阵. 这种关系被定义为矩阵的相似关系.

定义

设 A, B 为 n 阶方阵, 若存在可逆矩阵 P 使得

$$B = P^{-1}AP,$$

则称矩阵 A, B 相似.

小结

- 正交向量组、标准正交基;
- Schmidt 正交化;
- 正交矩阵和正交变换;
- 矩阵相似和相似变换.

- 设向量组

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  1) 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ Schmidt 正交化为 e_1, e_2, e_3;(Page138: 2-2)
  2) 将 α_4 表示为 e_1, e_2, e_3 线性组合的形式.
- Page139：4、5.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 21 日