

# 线性代数-17

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 26 日

# 本次课内容

1. 相似对角化
2. 实对称矩阵的正交相似对角化
3. 二次型和对称矩阵

- 矩阵  $A$  可相似对角化

$\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  为对角阵.

$\Leftrightarrow$  存在可逆阵  $P$ , 使得  $AP = P\Lambda$ . 令  $P = (P_1, \dots, P_n)$ , 则

$$\begin{aligned} A(P_1, \dots, P_n) &= (P_1, \dots, P_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow AP_i = \lambda_i P_i, i = 1, 2, \dots, n, P_1, \dots, P_n$  线性无关.

$\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

# 可对角化

## 定理 (可对角化)

$n$  阶方阵  $A$  可相似对角化当且仅当  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

# 可对角化

## 定理 (可对角化)

$n$  阶方阵  $A$  可相似对角化当且仅当  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

# 可对角化

## 定理 (可对角化)

$n$  阶方阵  $A$  可相似对角化当且仅当  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (推论) 若  $n$  阶方阵  $A$  有  $n$  个互异的特征值, 则  $A$  可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

# 可对角化

## 定理 (可对角化)

$n$  阶方阵  $A$  可相似对角化当且仅当  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵, 比如  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (推论) 若  $n$  阶方阵  $A$  有  $n$  个互异的特征值, 则  $A$  可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.
- 若  $n$  阶方阵  $A$  可相似对角化, 则可通过求  $A$  的所有特征向量来求可逆阵  $P$ .
- 可逆阵  $P$  不唯一, 并且可能是复矩阵.

## 例题

例 (例 10)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化? 若能,

- 1) 求可逆阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ ;
- 2) 求  $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$ . (与 P43 例 15 对比)

# 例题

例 (例 10)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化? 若能,

- 1) 求可逆阵  $P$  和对角阵  $\Lambda$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ ;
- 2) 求  $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$ . (与 P43 例 15 对比)

- 解法:
1. 求特征多项式  $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ , 由  $f(\lambda) = 0$  得特征值;
  2. 依次解齐次线性方程组  $(\lambda_i E - A)X = 0$ , 得特征值  $\lambda_i$  对应的特征向量;
  3. 给出可逆阵  $P$ .

## 例题

例 (例 11)

问  $t$  取何值时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  可对角化.

## 例题

例 (例 11)

问  $t$  取何值时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  可对角化.

- 设  $n$  阶矩阵  $A$  的每个特征值  $\lambda_i$  的重数为  $n_i$ ;  $(\lambda_i E - A)X = 0$  的基础解系包含向量的个数为  $m_i = n - R(\lambda_i E - A)$ . 则  $A$  可对角化  $\Leftrightarrow$  对每个特征值  $\lambda_i$ , 都有  $n_i = m_i$ .

# 实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵  $A$  可以正交相似对角化.

# 实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵  $A$  可以正交相似对角化.

定理 (定理 5)

设  $A$  为实矩阵, 则  $A$  可正交相似对角化  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

# 实对称的正交相似对角化

定义

若存在正交阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵  $A$  可以正交相似对角化.

定理 (定理 5)

设  $A$  为实矩阵, 则  $A$  可正交相似对角化  $\Leftrightarrow A = A^T$ .

- 性质 1: 实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2: 实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.

# 例题

例 (例 12)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = \Lambda$  为对角阵.

## 例题

例 (例 12)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求一个正交阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = \Lambda$  为对角阵.

- 解法:
1. 计算  $|\lambda E - A|$ , 求  $A$  的特征值;
  2. 求  $(\lambda_i E - A)X = 0$  的基础解系, 得  $A$  的线性无关特征向量;
  3. 将基础解系正交化、单位化;
  4. 写  $P^{-1}AP = P^T AP = \Lambda$ , 注意特征值与特征向量对应顺序.

# 例题

例 (例 13)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求  $A^n$ .

## 下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

## 下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型  $f(X) = X^TAX$  和对称阵  $A$  一一对应.
- Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.  
寻找可逆 (正交) 线性变换  $X = PY$ , 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

矩阵语言: 寻找可逆 (正交) 阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵. 8/10

## 下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P53 习题 1-(5))

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \end{aligned}$$

- 二次型  $f(X) = X^TAX$  和对称阵  $A$  一一对应.
- **Section-5、6、7 的中心任务：化简二次型/对称阵。**  
寻找可逆 (正交) 线性变换  $X = PY$ , 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵. 8/10

# 小结

---

- 相似对角化;
- 实对称阵的正交相似对角化.

- Page139-Page140: 16、19-1、20、23、24、26-1.

# 欢迎提问和讨论

吴利苏 (<http://wulisu.cn>)

Email: [wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn)

2023 年 12 月 26 日