线性代数-6

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 1 日

本次课内容

1. 逆矩阵的定义和性质

2. 逆矩阵的应用

引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.

引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？在求线性方程 $AX = \beta$ 时，能不能用

$$X = \frac{\beta}{A}$$

求解？

引入

- 在数的乘法运算中，对于数 $a \neq 0$, 存在唯一的数 b, 使得

$$ab = ba = 1$$

- 在计算一次方程 $ax = b$ 时，等号两边同乘 $\frac{1}{a}$, 可解得 $x = \frac{b}{a}$.
- 一个自然的问题：对于矩阵 A 能不能给出一个类似 $\frac{1}{A}$ 的概念？在求线性方程 $AX = \beta$ 时，能不能用

$$X = \frac{\beta}{A}$$

求解？
- $\Rightarrow$ 逆矩阵

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于 A, 如果存在一个 B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

逆矩阵

定义 (逆矩阵)

对于n 阶方阵A, 如果存在一个n 阶方阵B, 使得

$$AB = BA = E$$

则称 B 为 A 的逆矩阵.

性质

如果矩阵 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

- 将 A 的唯一逆矩阵记为 A^{-1}.

矩阵可逆的判定：A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

"$\Rightarrow$"

定理

如果矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$.

"$\Leftarrow$"

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

- 若 $AB = E$，则 $B = A^{-1}$. （定义的简化！）
- 若 A 可逆，则 $A^* = |A|A^{-1}$.

- $|A|=0$，则称 A 为奇异的，否则称为非奇异的.
- A可逆$\Leftrightarrow$$A$非奇异$\Leftrightarrow$$A$ 对应的线性变换非退化($\Leftrightarrow$ A满秩).

性质

- 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$;
- 若 A 可逆，$\lambda\neq 0$, 则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$;
- 若 A,B 为同阶方阵且都可逆，则 AB 可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

- P 可逆时，$PA=PB\Leftrightarrow A=B$ (左消去律), $AP=BP\Leftrightarrow A=B$ (右消去律).

例

求二阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例题（$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$）

例

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例

求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例

求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例题（$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$）

例

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例

求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例

A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.

例

求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.　　$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

例

求方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.　　$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

例

A 为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求 $|(2A)^{-1}-5A^*|$.　　-16

例

求解矩阵方程 $AXB=C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}.$$

性质

A 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $A = P \cdot \mathit{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$, 则矩阵多项式

$$f(A) = P \cdot \mathit{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

性质

A 为 n 阶方阵, 若存在可逆阵 P, 使得 $A = P \cdot \mathit{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \cdot P^{-1}$, 则矩阵多项式

$$f(A) = P \cdot \mathit{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}.$$

- 对于 n 阶方阵 A, B, 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$PAP^{-1} = B$$

则称 A 和 B 是相似的.

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m \\ &= a_0PEP^{-1} + a_1P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_mP\Lambda^mP^{-1} \\ &= P(a_0E + a_1\Lambda + \cdots + a_m\Lambda^m)P^{-1} \\ &= Pf(\Lambda)P^{-1} \end{aligned}$$

性质的证明

- 如果 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, 故

$$\begin{aligned} f(A) &= a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m \\ &= a_0 PEP^{-1} + a_1 P\Lambda P^{-1} + \cdots + a_m P\Lambda^m P^{-1} \\ &= P(a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_m \Lambda^m) P^{-1} \\ &= P f(\Lambda) P^{-1} \end{aligned}$$

- 若 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为对角矩阵，则

$$\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

从而

$$f(\Lambda) = \mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)).$$

例

设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $AP = P\Lambda$, 求 A^n.

例

设 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. $AP=P\Lambda$, 求 A^n.

例

求矩阵多项式 $f(A)=A^3+2A^2-3A$, 其中 $P\Lambda=AP$,

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -3\end{pmatrix}.$$

- n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

矩阵表示

$$AX = \beta. \tag{1}$$

- 若系数矩阵 A 可逆，对上式两边同时左乘 A^{-1}, 则解得

$$X = A^{-1}\beta$$

定理 (Carmer 法则)

n 个方程 n 个未知量的线性方程组 $AX=\beta$ 的系数行列式 $|A|\neq 0$, 则方程组存在一个唯一解

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}, x_2=\frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

其中 A_i 是将系数矩阵 A 的第 i 列替换为常数列得到的方阵, *i.e.*

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

例

用 Carmer 法则和逆矩阵方法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 & = 0. \end{cases}$$

小结

- 逆矩阵的定义
- A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- 逆矩阵的应用
  - 解矩阵方程,
  - 求矩阵多项式
  - 解线性方程组 $\Rightarrow$ Carmer 法则
    (系数矩阵为可逆方阵：n 个方程 n 个变量，系数行列式非零.)

作业

- Page53-54. 9-(3)(4)、13、14-(1)、22.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2023 年 12 月 1 日