Lec-1. 随机试验、样本空间、随机事件、频率与概率

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

1、什么是概率统计?

- 必然现象中的确定性规律:
  - $1+1=2$
  - 自由落体运动公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$

1、什么是概率统计?

- 必然现象中的确定性规律：
  - $1 + 1 = 2$
  - 自由落体运动公式 $h = \frac{1}{2}gt^2$
- 自然界和社会生活中还大量存在着随机现象：
  - 人的寿命
  - 天气现象
  - 金融市场

1、什么是概率统计?

- 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。
  - 老年人的余寿一般来说比年轻人短
  - 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
  - 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$

1、什么是概率统计?

- 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。
  - ◇ 老年人的余寿一般来说比年轻人短
  - ◇ 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
  - ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$
- 概率统计是一门专门研究随机现象的规律性的学科

1、什么是概率统计?

- 随机现象虽然存在不确定性，但还是有某些规律的。
  - ◇ 老年人的余寿一般来说比年轻人短
  - ◇ 明年 6 月 1 日，有很大可能杭州的气温比北京要高
  - ◇ 抛一枚均匀硬币出现正面的可能性为 $\frac{1}{2}$
- 概率统计是一门专门研究随机现象的规律性的学科
- 随机现象的广泛性决定了这一学科的重要性

1.1、概率论和数理统计

- 确切来说，概率论与数理统计是两个学科。
  - ◇ 概率论是数学的一个分支，研究如何定量描述随机现象及其规律；
  - ◇ 数理统计则以数据为唯一研究对象，包括数据的收集、整理、分析和建模，从而给出数据现象的某些规律进行预测或决策。大数据时代的来临，更为统计的发展带来了极大的机遇和挑战。

1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学思想。概率统计特殊的研究对象包含了许多独特的思维方式和思想方法，特别是如何看待和处理随机规律性，是其它学科中没有的。例如，以比较各种事件出现的可能性的大小进行决策的思想。
- 学方法。定量描述随机现象及其规律的方法，收集、整理、分析数据，从而建立统计模型的方法。

1.2、怎样学习《概率论与数理统计》

- 学应用。尽可能多地了解各种概念的背景、各种方法和模型的实际应用。不仅要学课程中提及的，也要自己收集、寻找各种实例。
- 学软件。数据处理的最后结果必须通过计算机实现。应该掌握统计软件的使用和结果分析。

1.3、怎样才算是课程成功学习?

- 是否对“随机”有足够认识
- 是否对“数据”有兴趣、有感觉
- 对“随机”有足够认识，即能随时随地用“随机”的观点去观察、看待、处理周围的事物。
- 对“数据”有兴趣、有感觉，即要善于发现、善于利用、善于处理周围的数据。

2、样本空间、随机事件

自然界与社会生活中的两类现象

$$\begin{cases}\text{确定性现象}\\ \text{随机现象}\end{cases}$$

确定性现象：

在一定条件下必然发生或不会发生的现象

- ◊ 例如: 太阳不会从西边升起、$1+1\neq 3$.

随机现象：

在一定条件下具有多种可能结果，且试验时无法预知出现哪个结果的现象.

- ◊ 例如掷骰子可能出现“1 点”，也可能是其他情况；
- ◊ 检验产品可能是合格品，也可能是不合格品.

例

- ◇ 向上抛出的物体会落下（确定）
- ◇ 打靶，击中靶心（不确定）
- ◇ 买了彩票会中奖（不确定）

2.1、随机试验

对随机现象的观察、记录、实验统称为随机试验. 它具有以下特性:

- 可以在相同条件下重复进行;
- 事先知道所有可能出现的结果;
- 进行试验前并不知道哪个试验结果会发生.

例

- ◇ 抛一枚硬币，观察试验结果；
- ◇ 对某路公交车某停靠站登记下车人数；
- ◇ 对听课人数进行一次点名.

2.2、样本空间

定义

随机试验的所有可能结果构成的集合称为样本空间，记为 $S=\{e\}$.

S 中的元素 e 称为样本点.

例

- ◇ 一枚硬币抛一次；

$$S=\{\text{正面},\text{反面}\};$$

- ◇ 记录一城市一日中发生交通事故次数；

$$S=\{0,1,2,\cdots\};$$

例

◇ 记录一批产品的寿命 x;

$$S = \{x \mid x \geq 0\};$$

◇ 记录某地一昼夜最高温度 x, 最低温度 y;

$$S = \{(x, y) \mid a \leq y \leq x \leq b\}.$$

注

1. 同一试验, 若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

注

1. 同一试验，若试验目的不同，则对应的样本空间也不同.

例

将一枚硬币抛三次，观察正反:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, \\ TTH, THT, TTT\}$$

若观察正面的次数:

$$S = \{0, 1, 2, 3\}.$$

注

2. 建立样本空间，事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例

$S = \{H, T\}$ 可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

注

2. 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例

$S = \{H, T\}$ 可表示抛硬币的正反面, 也可以表示产品的合格与不合格,

在具体问题中, 描述随机现象的第一步就是建立合适的样本空间.

4、随机事件

定义

样本空间 S 的子集 A 称为随机事件A，简称事件 A.

如果 A 中某个样本点发生，则称事件 A发生.
事件 A 的表示可用集合，也可用语言来表示.

4、随机事件

◇ 如果事件只含有一个样本点，则称其为**基本事件**.

◇ 如果把 S 看作事件，则每次试验 S 总是发生，则 S 称为**必然事件**.

◇ 如果事件是空集，里面不包含任何样本点，记为 $\varnothing$，则每次试验 $\varnothing$ 都不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

例

(1) 观察某公交站的候车人数，样本空间 $S=?$

(2) 事件 A 表示 “至少有 5 人候车”，$A=?$

(3) 事件 B 表示 “候车人数不多于 2 人”，$B=?$

例

(1) 观察某公交站的候车人数，样本空间 $S=?$

(2) 事件 A 表示“至少有 5 人候车”，$A=?$

(3) 事件 B 表示“候车人数不多于 2 人”，$B=?$

$S=\{0,1,2,...\}$; $A=\{5,6,7,...\}$; $B=\{0,1,2\}$.

4.1、事件的关系—包含、相等

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

4.1、事件的关系—包含、相等

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点，分析乙胜负情况.

解：乙投一骰子所有可能结果构成样本空间:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A := \{\text{“乙赢”}\} = \{6\}$$
$$B := \{\text{“平局”}\} = \{5\}$$
$$C := \{\text{“乙输”}\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

“乙不输”由 A 与 B 的合并组成 $\{5, 6\}$.

4.1、事件的关系—包含、相等

设试验 E 的样本空间为 S,
而 A, B 是 S 的子集.

- ◊ $A \subset B$: 事件 A 发生一定导致 B 发生.
- ◊ $A = B \Leftrightarrow A \subset B,\ A \supset B$.

4.1、事件的关系—包含、相等

例

1. $A=\{$明天晴天$\}$, $B=\{$明天无雨$\}$;
2. $A=\{$有多于 4 人候车$\}$,
   $B=\{$至少有 5 人候车$\}$;
3. 一枚硬币抛两次，$A=\{$第一次是正面$\}$,
   $B=\{$至少有一次正面$\}$.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k(k = 1, 2, \ldots)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的和事件记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k(k=1,2,...)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的和事件记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

◇ $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, ..., A_n$ 的和事件.

4.2、事件的运算—和事件

$A, B, A_k(k=1,2,...)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的和事件记为

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\},$$

表示 A 与 B 至少有一个发生.

◇ $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, ..., A_n$ 的和事件.

◇ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可数个事件 $A_1, ...$ 的和事件.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k (k = 1, 2, ...)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$, AB.

$$A \cap B = \{x | x \in A 且 x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k(k = 1, 2, ...)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$, AB.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

◇ $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件, $A_1, ..., A_n$ 的积事件.

4.2、事件的运算—积事件

$A, B, A_k(k = 1, 2, ...)$ 是样本空间 S 的子集.

◇ A 与 B 的积事件, 记 $A \cap B$ 或 $A \cdot B$, AB.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\},$$

表示 A 与 B 同时发生.

◇ $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件, $A_1, ..., A_n$ 的积事件.

◇ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, ...$ 的积事件.

4.2、事件的运算—差事件

◇ A 与 B 的差事件

$$A-B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

即 $A-B$ 发生是指 A 发生且 B 不发生.

$$A-B=A\overline{B}=A\cup B-B=A-(A\cap B).$$

4.2、互斥事件、逆事件

- ◊ 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 是互不相容的或互斥的. 表示 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.
- ◊ A 的逆事件 或对立事件 记为 $\overline{A}$. 若 $A \cup B = S$, $A \cap B = \varnothing$, 则 $B = \overline{A}$.

注: 对立与互斥的区别, 对立一定互斥, 互斥不一定对立.

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

◊ 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

◇ 交换律 $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$

◇ 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4.3、事件的运算定律

A, B, C 为三个事件,

- ◇ 交换律 $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$
- ◇ 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
- ◇ 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B),$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C).$

4.3、事件的运算定律

◊ 德摩根律 (对偶律) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4.3、事件的运算定律

◇ 德摩根律 (对偶律) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

◇ 推广的德摩根律 (对偶律)

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$$

4.3、事件的运算定律

注: $\overline{A \cap B}$ 与 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 的区别: $\overline{A \cap B}$ 表示 A 与 B 不同时发生, $\overline{A} \cap \overline{B}$ 表示 A 与 B 都不发生. 实际上,

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup A\bar{B}$$

例

用维恩图验证事件等式

$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$ 是否成立?

例

设 $A=\{$甲来听课$\}$, $B=\{$乙来听课$\}$. 则

- $A\cup B=\{$甲、乙至少有一人来$\}$;
- $A\cap B=\{$甲、乙都来$\}$;
- $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}=\{$甲、乙都不来$\}$;
- $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}=\{$甲、乙至少有一人不来$\}$
  $=\{$甲、乙中最多有一人来$\}$.

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生，B、C 都不发生:

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生，B、C 都不发生:
  $A\bar{B}\bar{C} = A - B - C$;

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生，B、C 都不发生:
  $A\bar{B}\bar{C} = A - B - C$;
- 恰有一个发生:

例

用 A、B、C 三个事件关系及运算表示下列各事件.

- A 发生，B、C 都不发生:
  $A\bar{B}\bar{C} = A - B - C$;
- 恰有一个发生:
  $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

例

- 至少有一个发生:

例

- 至少有一个发生: $A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}=(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C)\cup ABC$;

例

- 至少有一个发生:
$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC$;
- 至少有两个发生:

例

- 至少有一个发生:
  $A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC$;
- 至少有两个发生:
  $AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$;

例

- 至少有一个发生:
  $A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC$;
- 至少有两个发生:
  $AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC$;
- 至少有一个不发生:

例

- 至少有一个发生:

$$A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup ABC;$$

- 至少有两个发生:

$$AB \cup BC \cup AC = AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup ABC;$$

- 至少有一个不发生:

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{ABC} = (A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C) \cup (AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C) \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

5.1、频率

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验发生的可能性有多大，为此引入频率.

频率是 $0 \sim 1$ 之间的一个实数，在大量重复试验的基础上给出了随机事件发生可能性的估计.

5.1、频率

定义

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

其中 n 表示总实验次数，n_A 表示发生的次数（频数）.

称 $f_n(A)$ 为事件 A 在这 n 次实验中发生**频率**.

例

2000 年悉尼奥运会开幕前，气象学家对两个开幕候选日“9 月 10 日”和“9 月 15 日”的 100 年气象学资料分析发现，

日期	频数（下雨天数）	频率
9 月 10 日	86	86%
9 月 15 日	22	22%

因此最后决定开幕日定为“9 月 15 日”。

性质（频率性质）

1. $0 \le f_n(A) \le 1.$
2. $f_n(S) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0.$
3. 若 $A_1, \ldots A_K$ 是两两互不相容事件，则 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \ldots + f_n(A_n).$

例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 7 遍，观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.

例

将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率. 见书中表格.

总结: 次数 n 较小时, 频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动, 幅度较大, 但随着 n 的增大, $f_n(H)$ 呈现稳定性, 趋于一个稳定值. 从本质上反映了事件在试验中出现的可能性大小, 即概率.

5.2、概率

定义 (统计定义)

当试验的次数增加时，随机事件 A 发生的频率的稳定值 p 称为概率. 记为 $P(A)=p$.

5.2、概率

定义 (公理化定义)

设随机试验对应的样本空间为 S, 对于每一个事件 A 定义 $P(A)$, 若满足:

- 非负性: 对于每一个事件 A, 有 $P(A) \geq 0$.
- 规范性: 对于必然事件 S 有 $P(S) = 1$.
- 可列可加性: 设 $A_1, \ldots$ 是两两互不相容事件, 即 $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$.

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

性质（概率性质）

1. $P(\varnothing) = 0.$

性质（概率性质）

1. $P(\varnothing) = 0.$

证明: 令 $A_n = \varnothing$, 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$,

由可列可加性得

$$P(\varnothing) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

所以 $P(\varnothing) = 0.$ $\square$

性质 (概率性质)

2. (有限可加性) 若 $A_1, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件, 则

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

性质（概率性质）

2. *(有限可加性)* 若 $A_1, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件，则

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

证明：令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \varnothing$，

则 $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$，由可列可加性

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \quad \square$$

性质（概率性质）

3. 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$

性质 (概率性质)

3. 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A),$$

$$P(B) \geq P(A).$$

证明: 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B-A)$ 且 $(B-A) \cap A = \varnothing$.
则由有限可加性, $P(B) = P(A) + P(B-A)$,
进一步由 $P(B-A) \geq 0$ 可得 $P(B) \geq P(A)$. $\square$

性质（概率性质）

4. $P(A) \le 1.$

性质（概率性质）

4. $P(A) \leq 1.$

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1.$ $\square$

性质（概率性质）

4. $P(A) \leq 1.$

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1.$ $\square$

性质（概率性质）

5. 逆事件得概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

性质（概率性质）

4. $P(A) \leq 1.$

证明: $A \subset S$, 则 $P(A) \leq P(S) = 1.$ $\square$

性质（概率性质）

5. 逆事件得概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

证明: $A \cup \bar{A} = S$ 且 $A \cap \bar{A} = \varnothing$,
由有限可加性,
$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$ $\square$

性质（概率性质）

6. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明: $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且

$A(B - AB) = \varnothing$, $AB \subset B$. 故

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. $\square$

性质（概率性质）

- *(6+.)*
  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$
- *(6++)*
  $$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n).$$

例

设 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$. 求下列三种情况下 $P(B\bar{A})$ 的值.

(1) A 与 B 互斥.

(2) $A \subset B$.

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

例

设 A, B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$. 求下列三种情况下 $P(B\bar{A})$ 的值.

(1) A 与 B 互斥.

(2) $A \subset B$.

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解:(1). $P(B\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$.

(2). $P(B\bar{A}) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$.

(3). $P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B - AB)$

$$= P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}. \qquad \square$$

例

设甲、乙两人向同一目标进行射击, 已知甲击中的概率为 0.7, 乙击中目标的概率为 0.6, 两人同时击中目标的概率为 0.4, 求

(1) 目标不被击中的概率;

(2) 甲击中目标而乙未击中的概率.

解：设 $A=\{$甲击中目标$\}$, $B=\{$乙击中目标$\}$,
则

$$P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(AB)=0.4.$$

而 $\{$目标不被击中$\}=\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$,
$\{$甲击中目标而乙未击中$\}=A\bar{B}=A-AB$,
所以

$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=0.1;$$

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.3.$$

□