Lec-10. 条件分布，相互独立的随机变量

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

目录

二维连续型随机变量的条件分布

- 连续型随机变量 X, Y,

$$P\{X=x\}=0, \quad P\{Y=y\}=0, \qquad \forall x, y.$$

所以不能直接用条件概率引入条件分布函数，即定义 $P\{X=x|Y=y\}$ 没有意义.

二维连续型随机变量的条件分布

- 连续型随机变量 X, Y,

$$P\{X=x\}=0, \quad P\{Y=y\}=0, \qquad \forall x, y.$$

所以不能直接用条件概率引入条件分布函数, 即定义 $P\{X=x|Y=y\}$ 没有意义.

- 给定 y, 对任意 ε, x, 考虑条件概率

$$P\{X\leq x|y<Y\leq y+\varepsilon\}.$$

若 $P\{y < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$ 则有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y+\varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y+\varepsilon\}}$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x,y)\,dy\right] dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\,dy}$$

若 $P\{y < Y \leq y+\varepsilon\} > 0$ 则有

$$P\{X \leq x | y < Y \leq y+\varepsilon\} = \frac{P\{X \leq x, y < Y \leq y+\varepsilon\}}{P\{y < Y \leq y+\varepsilon\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} \left[\int_{y}^{y+\varepsilon} f(x, y)\, dy\right] dx}{\int_{y}^{y+\varepsilon} f_Y(y)\, dy}$$

当 ε 很小时, 上式近似于

$$\frac{\varepsilon \int_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx}{\varepsilon f_Y(y)} \approx \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx$$

- 若对于固定的 y, $f_Y(y) > 0$, 则称

$$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \triangleq f_{X|Y}(x|y)$$

为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度.

- 称

$$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$$

$$\triangleq F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x | Y = y\}$$

为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件分布函数.

二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx \approx P\{X \le x | y < Y \le y+\varepsilon\}.$$

二维连续型条件分布的含义

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,dx \approx P\{X \le x | y < Y \le y+\varepsilon\}.$$

注

- 非负性：$f_{X|Y}(x|y) \ge 0.$
- 规范性：$F_{X|Y}(\infty|y) = 1.$

类似可定义在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$,
- $F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\leq y|X=x\}=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$.

类似可定义在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度和条件分布函数.

- $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$,
- $F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\le y|X=x\}=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$.

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布 + 条件分布.
- 联合分布 $\Leftarrow$ 边缘分布 + 条件分布.

例

设二维随机变量 (X, Y) 在 $x^2 + y^2 \le 1$ 上服从均匀分布，即有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (x, y) \in G; \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解:$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$
$$=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $-1<y<1$ 时

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & -\sqrt{1-y^2}\le x\le \sqrt{1-y^2};\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

□

例

设 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X=x\in(0,1)$ 时, 设 Y 在 $(x,1)$ 上随机地取值, 求 Y 的概率密度.

解: $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} -\ln(1-y) & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \qquad \square$$

相互独立的随机变量

事件 A, B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则 A, B 相互独立.

相互独立的随机变量

定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于任意 x, y 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$$

即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 则称 X 和 Y 是相互独立的.

- 离散型 (X, Y).
  - X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$. 即 $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$.
- 连续型 (X, Y).
  - X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立.

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布/条件分布 + 独立性.

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立，则

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布/条件分布 + 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立，则
  - 联合分布 $\Leftarrow$ 边缘分布 $\Leftarrow$ 条件分布.

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布/条件分布 $+$ 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立，则
    - 联合分布 $\Leftarrow$ 边缘分布 $\Leftarrow$ 条件分布.

注

- 联合分布 $\Rightarrow$ 边缘分布 / 条件分布 $+$ 独立性.
- 若二维随机变量的边缘分布相互独立，则
  - 联合分布 $\Leftarrow$ 边缘分布 $\Leftarrow$ 条件分布.

在独立性前提下，只需知道联合分布、边缘分布、条件分布三者之一，便可求其余两个分布.

例

已知 (X, Y) 的联合分布律

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

判断 X, Y 的独立性.

解: 逐个检验 $p_{ij} = p_{i\bullet} p_{\bullet j}$.

$P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{6} = P\{X=1\}P\{Y=0\}$
$P\{X=1, Y=1\} = \frac{2}{6} = P\{X=1\}P\{Y=1\}$
$P\{X=2, Y=0\} = \frac{1}{6} = P\{X=2\}P\{Y=0\}$
$P\{X=2, Y=1\} = \frac{2}{6} = P\{X=2\}P\{Y=1\}$

则 X 和 Y 相互独立. $\square$

若

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{6} \neq P\{X=1\}P\{Y=0\}$

只要有一对 i, j 使得 $p_{ij} \neq p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ 就能判断 X, Y 不独立.

例

设 X 和 Y 相互独立, 已知 (X, Y) 的联合分布律

Y / X	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
1	0.01	0.2		
2	0.03			
$P\{Y=y_j\}$				

求出联合分布律.

解: X, Y 相互独立, 则 $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

$P\{Y = 0\} = 0.04,$

$P\{Y = 0\}P\{X = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\},$

则 $P\{X = 1\} = 0.25.$ $P\{X = 2\} = 0.75.$

$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 1\}P\{Y = 1\},$ 则

$P\{Y = 1\} = 0.8,$ $P\{Y = 2\} = 0.16.$

$P\{X = 2, Y = 1\} = 0.6,$

$P\{X = 2, Y = 2\} = 0.12.$ $\square$

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

解: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \begin{cases} 3e^{-3y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 相互独立. $\square$

例

(X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & 0 < x < y < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

X, Y 是否相互独立?

解: $f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

当 $0 < y < x < 1$ 时, $f(x, y) = 0$, 而 $f_X \cdot f_Y > 0$.

故 X, Y 不相互独立. $\square$

例 ($\star$)

设 (X, Y) 为二维正态随机变量, 证明 X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$.

例 ($\star$)

设 (X, Y) 为二维正态随机变量, 证明 X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$.

证:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \ y \in \mathbb{R}.$$

证: 若 $\rho = 0$, 则对任意 x, y

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y),$$

即 X 和 Y 相互独立.

反之, 若 X 和 Y 相互独立, $f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 连续. 故, 对任意的 x, y, 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

特别地, 令 $x = \mu_1, y = \mu_2$, $f(\mu_1, \mu_2) = f_X(\mu_1) f_Y(\mu_2)$, 则

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而 $\rho = 0$. $\square$

例

一负责人到达办公室的时间均匀分布在 $8 \sim 12$ 时，其秘书到达办公室时间均匀分布在 $7 \sim 9$ 时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间差不超过 $5min(\frac{1}{12}h)$ 的概率.

解: 设 X, Y 分别表示负责人和秘书到达办公室的时间.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 8<x<12;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 7<y<9;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

X, Y 相互独立,

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8} & 8<x<12, 7<y<9;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le \tfrac{1}{12}\}=\iint_G f(x,y)\,dxdy=\tfrac{1}{48}. \qquad \square$$

n 维随机变量的分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n\}$$

n 维连续型随机变量

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 使得对任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, 有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

则称 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为连续型的随机变量，称 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 为 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的概率密度函数.

n 维随机变量的边缘分布函数

- 称
$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty)$$
为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘分布函数.
- 称
$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \dots, \infty)$$
为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 关于 (X_1, X_2) 的边缘分布函数.

n 维连续型随机变量的边缘分布函数

- 连续型随机变量 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 关于 X_1 的边缘概率密度函数为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n.$$

- 关于 (X_1, X_2) 的二维边缘概率密度函数为

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_3\, dx_4 \ldots dx_n.$$

- 类似可得 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 的$k(1 \le k < n)$ 维边缘概率密度.

n 维随机变量的独立性

- 若对任意 $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$F(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, ..., X_n$ 是相互独立的.

- 若对任意 $x_1, ..., x_m$, $y_1, ..., y_n$,

$$F(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = F_1(x_1, ..., x_m)F_2(y_1, ...y_n),$$

其中 F_1, F_2, F 分别为 $(X_1, ..., X_m)$, $(Y_1, ..., Y_n)$, $(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Yn)$ 的分布函数. 则称 $(X_1, ..., X_m)$, $(Y_1, ..., Y_n)$ 是相互独立的.

n 维随机变量的独立性

定理

设 $(X_1, \ldots, X_m)$ 和 $(Y_1, \ldots, Y_n)$ 相互独立，则

(1) 对任意 i, j, X_i 和 Y_j 相互独立.

(2) 若 h, g 是连续函数，则 $h(X_1, \ldots, X_m)$ 和 $g(Y_1, .., Yn)$ 相互独立.