Lec-12. 两个随机变量函数的分布 (续)

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目录

1. $Z = \frac{Y}{X}$ 和 $Z = XY$ 的分布

2. $M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

$Z=\frac{Y}{X}$ 和 $Z=XY$ 的分布

设 (X, Y) 为连续型随机变量, 则 $Z=\frac{Y}{X}$, $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \mid x \mid f(x, xz)\, dx,$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mid x \mid} f(x, \frac{z}{x})\, dx.$$

$$F_{Y/X}(z) = P\{\, Y/X \leq \, z\} = \iint\limits_{y/x \leq z} f(x, y)\, dx dy$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\,Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x\le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x\le z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x\le z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\, Y/X \le z\} = \iint\limits_{y/x \le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x \le z,\, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x \le z,\, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\xlongequal{y=xu} \int_{-\infty}^{0} \int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) = P\{\,Y/X \le z\} &= \iint\limits_{y/x\le z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x\le z,x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x\le z,x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\xlongequal{y=xu} \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P\{\, Y/X \leq z\} = \iint\limits_{y/x \leq z} f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{y/x \leq z, x<0} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{y/x \leq z, x>0} f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)\,dydx \\
&\overset{y=xu}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)\,dudx + \int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)\,dudx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} |x|f(x,xu)\,dudx = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x,xu)\,dx\right) du
\end{aligned}
$$

- 类似可证 $Z = XY$ 的概念密度 (作业)

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})\, dx.$$

- 特别地, X, Y 相互独立时,

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) f_Y(zx)\, dx,$$

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx.$$

例

某公司提供一种地震保险. 保费 Y 的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{25} e^{-y/5} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

保险赔付 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

设 X 与 Y 相互独立, 求 $Z = Y/X$ 的概率密度.

解: 当 $z < 0$ 时, $f_Z(z) = 0$.

当 $z > 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x \,| f_X(x) f_Y(zx)\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} \cdot \frac{xz}{25} e^{-xz/5}\, dx \\
&= \frac{z}{125} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x \cdot \frac{1+z}{5}}\, dx = \frac{z}{125} \int_0^{+\infty} x^{3-1} e^{-x}\, dx \\
&= \frac{z}{125} \cdot \frac{\Gamma(3)}{((1+z)/5)^3} \\
&= \frac{2z}{(1+z)^3}.
\end{aligned}
$$

$\square$

$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是相互独立的随机变量,

- $$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\} P\{Y \le z\} = F_X(z) F_Y(z) \end{aligned}$$

$M = \max\{X, Y\}$ 和 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

设 X, Y 是相互独立的随机变量,

- $$F_{\max}(z) = P\{M \le z\} = P\{X \le z, Y \le z\} \\ = P\{X \le z\}P\{Y \le z\} = F_X(z)F_Y(z)$$
- $$F_{\min}(z) = P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\} \\ = 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\} \\ = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$M = \max\{X_1, ..., X_n\}$ 和 $N = \min\{X_1, ..., X_n\}$ 的分布

设 $X_1, ..., X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，

- $F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) ... F_{X_n}(z)$,

$M = \max\{X_1, ..., X_n\}$ 和 $N = \min\{X_1, ..., X_n\}$ 的分布

设 $X_1, ..., X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，

- $F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$,
- $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)]...[1 - F_{X_n}(z)]$.

$M = \max\{X_1, ..., X_n\}$ 和 $N = \min\{X_1, ..., X_n\}$ 的分布

设 $X_1, ..., X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量，

- $F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)...F_{X_n}(z)$,
- $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)]...[1 - F_{X_n}(z)]$.
- 特别地，当 $X_1, ..., X_n$ 有相同分布函数时

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min} = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例

已知 X, Y 的分布函数.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0; \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - 0.5e^{-y} & y \geq 0; \\ 0.5e^{y} & y < 0, \end{cases}$$

X 与 Y 相互独立, 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数.

解: $F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$.

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$,

当 $z \geq 0$ 时,

$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z})$,

所以

$$F_Z(z) = \begin{cases} (1 - e^{-z})(1 - 0.5e^{-z}) & z \geq 0; \\ 0 & z < 0. \end{cases} \qquad \square$$

例

设 X, Y 相互独立, 均服从 $U(0,1)$, 求 $M = \max\{X, Y\}$ 的概率密度.

解: $f(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1);\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0;\\ x & 0<x<1;\\ 1 & x\ge 0;\end{cases}$$

$$F_{\max}(x)=F^2(x)=\begin{cases}0 & x\le 0;\\ x^2 & 0<x<1;\\ 1 & x\ge 0;\end{cases}$$

$$f_{\max}(x)=F'_{\max}(x)=\begin{cases}2x & x\in(0,1);\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

□

例

设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当 L_1 损坏时, L_2 开始工作)
设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y. 已知其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 且 $\alpha \neq \beta$, 试分别就三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解:(i) 串联, 由于 L_1, L_2 中一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 则 L 的寿命为 $Z = \min\{X, Y\}$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \alpha e^{-\alpha x} & x > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \beta e^{-\beta y} & y > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_{\min}(z) = \begin{cases} 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

(ii) 并联, $Z = \max\{X, Y\}$

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{\alpha z})(1 - e^{\beta z}) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z} & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

(iii) 备用情况 $Z = X + Y$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y}\,dy \\
&= \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}\,dy \\
&= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}).
\end{aligned}
$$

$$
f(z) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) & z > 0; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}
$$

$\square$