Lec-3. 几何概型、条件概率

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

目录

几何概型　(样本空间无限)

当随机试验的样本空间是某个区域, 并且任意一点落在度量 (长度, 面积, 体积) 相同的子区域是等可能的, 则事件 A 的概率可定义为

$$P(A) = \frac{S_A}{S},$$

其中 S 是样本空间的度量, S_A 是事件 A 的子区域的度量.

当古典概型的试验结果为连续无穷多个时, 就归结为几何概型.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

例 (会面问题)

甲乙两人相约 0 点到 T 点这段时间内在某地会面, 先到者等候另一个人 $t(t < T)$ 时, 过时就离去, 假定每个人在指定的 0 到 T 时内的任一时刻到达该地是等可能的. 求两人会面的概率.

解: 设 x 和 y 分别为甲乙两人到达的时刻, $0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T$, 两人会面的充要条件 $|x - y| \leq t$.

$$P = \frac{S_A}{S} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2}.$$

□

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

例

在长度为 a 的线段内任取两点，将其分为三段，求这三段可构成三角形的概率.

解：设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

例

在长度为 a 的线段内任取两点，将其分为三段，求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases}$

例

在长度为 a 的线段内任取两点, 将其分为三段, 求这三段可构成三角形的概率.

解: 设三段分别长为 $x, y, a-x-y$.

$S=\{(x,y)|0<x<a, 0<y<a, 0<x+y<a\}$,

$A=\{$构成三角形$\}$

$$A\text{发生} \iff \begin{cases} x+y>a-x-y; \\ y+(a-x-y)>x; \\ x+(a-x-y)>y. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{a}{2}<x+y<a; \\ 0<x<\frac{a}{2}; \\ 0<y<\frac{a}{2}. \end{cases}$ $\qquad P(A)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\dfrac{1}{4}.$ $\square$

条件概率

例 (引例)

将一枚硬币抛两次, 观察正反面. 设 A 为至少有一次为正面, B 为两次相同面. 求已知 A 发生的条件下 B 发生的概率.

解: 样本空间 $S=\{HH, HT, TH, TT\}$,
$A=\{HH, HT, TH\}$, $B=\{HH, TT\}$.
由于事件 A 已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而其中事件 B 包含的基本事件只占其中的一种，所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

表示在 A 发生的条件下, B 发生的条件概率.

在这个例子中, 若不知道事件 A 发生，则事件 B 发生的概率为 $P(B)=\frac{2}{4}$. 所以

$$P(B|A)\neq P(B).$$

其原因在于事件 A 的发生改变了样本空间，使它由原来的 S 缩减为新的样本空间 $S_A=A$.

条件概率的定义

定义

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0$$

称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

条件概率是概率

性质 ($P(\cdot \mid B)$ 是概率)

- 非负性: $P(B|A) \geq 0$;
- 规范性: $P(S|A) = 1$;
- 可列可加性: $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ 满足 $B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

- $C \subset B \Longrightarrow P(C|A) \le P(B|A)$.

例

一个盒子有 4 只产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从中取两次, 每次任取一只作不放回抽样. 设事件 A 为第一次取到的是一等品. B 为第二次取到的是一等品. 求 $P(B|A)$.

解: 将产品编号: 1,2,3 一等品, 4 为二等品. 以 (i, j) 表示第一次, 第二次分别取到第 i 号, 第 j 号产品. 则

$$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\ (3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)(4,3)\}$$

含 $12=C_4^1C_3^1$ 个样本点.

$$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\ (3,1),(3,2),(3,4)\}$$

含 $9=C_3^1C_3^1$ 个样本点.

$$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

含 $6=C_3^1C_2^1$ 个样本点. 所以,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}.$$

乘法定理

- 设 $P(A) > 0$, 则有乘法公式,

$$P(AB) = P(B|A)P(A).$$

- 设 $P(B) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

乘法定理的推广

- 三个事件 A, B, C 满足 $P(AB) > 0$,

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

- n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$, $P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\times \cdots \times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

例

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$.
求 $P(A \cup B), P(\bar{A}|A \cup B)$.

例

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$.
求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B)$.

解: $P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12}$,
$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{2}$. 所以
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}|A\cup B)&=1-P(A|A\cup B)\\&=1-\frac{P(A\cap(AUB))}{P(A\cup B)}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$\square$

例

设袋中有 5 个红球, 4 个白球, 采用不放回抽样, 每次取一个, 取 3 次.

(1) 求前两次中至少有一次取到红球的概率.

(2) 已知前两次中至少有一次取到红球, 求前两次中恰有一次取到红球的概率.

(3) 求第 1,2 次取到红球第 3 次取到白球的概率.

解: 记 $A_i = \{第 i 次取到红球\}$, $i=1,2,3$, 则第 i 次取到白球为 $\bar{A}_i$.

$B = \{前两次至少有一次取到红球\}$,

$C = \{前两次恰有一次取到红球\}$.

(1) $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{9}\times\frac{3}{8} = \frac{5}{6}$.

(2) $P(BC) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$,

$P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3}$

或 $P(C|B) = 1 - P(\bar{C}|B) = 1 - \frac{P(B\bar{C})}{P(B)} = 1 - \frac{P(A_1A_2)}{P(B)} = \frac{2}{3}$.

(3)

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\bar{A}_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2) \\ &= \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7} = \frac{10}{63}. \end{aligned}$$

□

例

设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下打破的概率为 $\frac{1}{2}$，若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$，试求落下三次未打破的概率.

解: $A_i=\{第\,i\,次落下打破\}$, $i=1,2,3$,
$B=\{落下三次未打破\}$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= (1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2}) = \frac{3}{200}. \end{aligned}$$

或 $\bar{B}=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$,
$A_1, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 互不相容, 则
$P(\bar{B})=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$.
$P(\bar{A}_1A_2)=P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{7}{10}(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{20}$.
$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$. $\square$

样本空间的划分

定义

设 S 为样本空间, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为一组事件. 若

(i) 不重: $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j.$

(ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S.$

样本空间的划分

定义

设 S 为样本空间, $B_1, B_2, ..., B_n$ 为一组事件. 若

(i) 不重: $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j.$

(ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S.$

- 若 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 S 的一个划分, 则每次试验 $B_1, B_2, ..., B_n$ 中必有且仅有一个发生.

例

甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了 5 点. 设样本空间
$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{乙赢}\} = \{6\} \\ B &:= \{\text{平局}\} = \{5\} \\ C &:= \{\text{乙输}\} = \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

则事件 A, B, C 为样本空间 S 的一个划分.

全概率公式

定理

设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, ..., n)$，则有全概率公式:

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \\
\ldots + P(A|B_n)P(B_n) \\
= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)
\end{aligned}
$$

证明: $A = AS = AB_1 \cup ... \cup AB_n$,

$$(AB_i) \cap (AB_j) = \varnothing,$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + ... + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + ... + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \qquad \square \end{aligned}$$

注: 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率问题, 分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后用概率的可加性求出最终结果. (化整为零)

贝叶斯 (Bayes) 公式

定理

设 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum p_j q_j}$$

其中 $p(B_i) = p_i$, $P(A|B_i) = p_i$.

证: 由条件概率, 全概率公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}. \qquad \square$$

注: 特别地, $n=2$, B_1, B_2 是 S 的一个划分. 记 $B_1=B$, $B_2=\bar{B}$, 则

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

$$P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}.$$

例

一小学举办家长开放日，欢迎家长参加活动. 小明的母亲参加的概率为 80%. 若母亲参加，则父亲参加的概率为 30%；若母亲不参加，则父亲参加的概率为 90%.

(1) 求父母都参加的概率；

(2) 求父亲参加的概率；

(3) 在已知父亲参加的条件下，求母亲参加的概率.