Lec-4. 独立性

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目 录

例

有一批同型号的节能灯，已知其中由一厂生产的占 15%，二厂生产的占 80%，三厂生产的占 5%。又知这三厂的节能灯次品率分别为 2%, 1%, 3%。问

(1) 从这批节能灯中任取一件，求它是次品的概率。

(2) 从这批节能灯中任取一件，发现是次品，那么它分别是由各厂生产的概率是多少？

解: $A=\{$取到的是一只次品$\}$,
$B_i=\{$取到的产品是i 厂的节能灯$\}$, $i=1,2,3$ 为 S 的一个划分. 则有

$$P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05$$

$$P(A|B_1)=0.0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03.$$

(1) 由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.0125.$$

(2) 贝叶斯 (Bayes) 公式 $P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{3}P(B_j)P(A|B_j)}$

$P(B_1|A)=0.24$, $P(B_2|A)=0.64$, $P(B_3|A)=0.12.$ $\square$

例

对以往数据分析，当机器调整良好时，产品合格率为 98%，而当机器发生故障时合格率为 55%，每天早上机器开动时，机器调整良好时概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时，机器调整良好的概率.

解: $A=\{$产品合格$\}$, $B=\{$机器调整良好$\}$, 求 $P(B|A)$.

$P(A|B)=0.98$, $P(A|\bar{B})=0.55$, $P(B)=0.95$, $P(\bar{B})=0.05$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=0.97. \quad \square$$

95% 是由以往数据分析得到的先验概率,
97% 是得到信息之后再重新加以修正的后验概率.

例

根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下效果：设

$A = \{$试验反应是阳性$\}$,

$C = \{$被诊断患有癌症$\}$.

则 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$.

已知某群体 $P(C) = 0.005$, 试求 $P(C \mid A)$, 问这种方法能否用于普查?

解:

$$P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C}))} = 0.087.$$

若用于普查, 则准确性只有 8.7%, 也就是 1000 个具有阳性反应的病人中只有 87 人确定患癌症. 所以不宜用于普查. 若阳性需要作进一步检查. □

独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若

$$P(B|A) = P(B)$$

独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若

$$P(B|A) = P(B)$$

$\Rightarrow A, B$ **独立**.

例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次, 每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设 $A_i = \{第\ \mathsf{i}\ 次取到正品\}, i = 1, 2.$ 比较 $P(A_2|A_1)$ 与 $P(A_2)$.

例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次, 每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设 $A_i = \{第\ \mathrm{i}\ 次取到正品\}, i = 1, 2.$ 比较 $P(A_2|A_1)$ 与 $P(A_2)$.

解:

- 不放回抽样: $P(A_2|A_1) = \frac{7}{9} \neq P(A_2) = \frac{8}{10}$.
- 放回抽样: $P(A_2|A_1) = \frac{8}{10} = P(A_2)$. □

因此, 放回抽样时, A_1 的发生对 A_2 的发生概率不影响.

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$$

且另一方面

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1)\,P(A_2)}{P(A_2)} = P(A_1)\,,$$

即 A_2 的发生对 A_1 的发生概率也不影响.
此时就称事件 A_1 与 A_2 相互独立.

独立性

定义

设 A, B 两事件, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立, 简称独立.

独立性

定义

设 A, B 两事件, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立, 简称**独立**.

之所以用上述方式定义，一是因为 A 与 B 的对称性，二是不需要条件概率存在的条件，即事件的概率可以为 0.

定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(A)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A) = P(B)$.
- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(A|B) = P(A)$.

定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(A)>0}{\iff} P(B|A) = P(B).$
- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(B)>0}{\iff} P(A|B) = P(A).$

直观来看，若 A 与 B 相互独立，则不论 A 是否发生，都不能提供 B 是否发生的信息，反之也是. 这就有下面的性质.

定理

下列说法等价 (TFAE).

- A, B 独立;
- $\bar{A}, B$ 独立;
- $A, \bar{B}$ 独立;
- $\bar{A}, \bar{B}$ 独立.

证明：仅证

$P(AB)=P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$.

当 $P(AB)=P(A)P(B)$ 时,

$$
\begin{aligned}
P(A\bar{B}) &= P(A-AB) \\
&= P(A)-P(AB) \\
&= P(A)[1-P(B)] \\
&= P(A)P(\bar{B}).
\end{aligned}
$$

反之也成立. $\square$

多事件的独立性

定义

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个随机事件, 若对 $2 \leq k \leq n$, 均有:

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

三事件的独立性

特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

三事件的独立性

特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

两两独立 $\overset{?}{\Rightarrow}$ 相互独立?

三事件的独立性

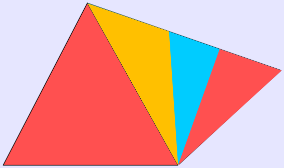
特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B), \\ P(AC) &= P(A)P(C), \\ P(BC) &= P(B)P(C), \end{aligned}\right\} \text{两两独立} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

两两独立 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 相互独立?

例

有一个正四面体，现在给一面涂上红色，一面涂黄色，一面涂蓝色，还有一面涂红黄蓝。



现任取一面，令

$A = \{\text{含红色}\}$, $B = \{\text{含黄色}\}$, $C = \{\text{含蓝色}\}$.

问 A, B, C 是否两两独立？是否相互独立？

解: 对四面红, 黄, 蓝, 三色分别标 1, 2, 3, 4.

$A = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,4\}$, $B = \{2,4\}$,
$C = \{3,4\}$.

$AB = BC = AC = ABC = \{4\}$.

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

$P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{4}$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

故, 两两独立但不相互独立. $\square$

推论

(1) 若 $A_1, A_2, ..., A_n (n \geq 3)$ 相互独立, 则其中任意 $k\,(2 \leq k \leq n)$ 个事件也相互独立.

(2) 若 n 个事件 $A_1, ..., A_n$ 相互独立, 则将 $A_1, ..., A_n$ 中任意个事件换成它们的对立事件, 所得 n 个事件仍相互独立.

(3) 若 $A_1, ..., A_n$ 相互独立, 则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) \end{aligned}$$

例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

解: $A_i = \{第\, i\, 人击落飞机\}, i = 1, ..., 10.$

$B = \{击落飞机\}.$

$B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10},$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10}}) \\
&= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 ... \bar{A}_{10}) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ... P(\bar{A}_{10}) \\
&= 1 - 0.8^{10} = 0.893. \qquad \square
\end{aligned}
$$

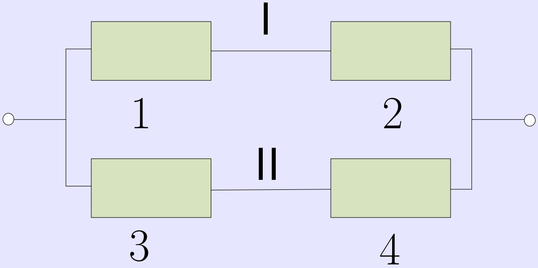
实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性.

一般，出现 A, B 没有关联或关联很微弱，或出现"各自"，"同时"，"互不干扰"，"独立地"等字眼，则可认为 A, B 是独立的.

一旦确定事件是相互独立的，在计算积事件的概率时，尽可转化为事件概率的乘积进行计算.

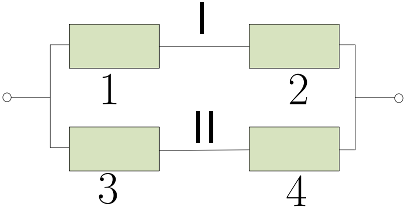
例

设有 4 个独立构成的系统，设每个元件能正常运行的概率为 P_i. 求系统正常运行的概率.



解:

$A_i = \{$第 i 个元件运行正常$\}$,
$i = 1, 2, 3, 4.$
$A = \{$系统正常运行$\}$.



系统由 I, II 两条线路组成, 当且仅当至少有一条线路中的两个元件正常工作时, 系统正常运行. $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$,

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\
&= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - \\
&\qquad P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).
\end{aligned}
$$

□

例

某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故，设他每次操作发生事故的概率为 $P = 0.0001$，独立重复进行了 n 次．求

(1) n 次都不发生事故的概率；

(2) 至少有一次发生事故的概率．

解:$A_i = \{$第 i 不发生事故$\}$, $i = 1, ...n$.
$B = \{n$ 次都不发生$\}$, $C = \{$至少有一次$\}$.
则 $A_1, ..., A_n$ 相互独立. $P(A_i) = 1 - p = 0.9999$.
$P(B) = P(A_1 ... A_n) = (1 - p)^n$,
$P(C) = 1 - P(B) = 1 - (1 - p)^n$,
当 $n \to \infty$ 时, $P(C) \to 1$. $\square$

实际推断原理: 小概率事件 $P(A) = 0.0001$, 进行一次试验, A 几乎不发生.
但"小概率事件"在大量独立重复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的. 不能忽视.
例如, $n = 7000$, $P(C) = 0.5053 > 0.5$.

例

甲，乙，丙三人同时对飞机射击. 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7. 飞机被一人击中而被击落的概率 0.2, 被两人击中落下的概率为 0.6, 被三人击中必定落下. 求飞机被击落的概率.

解: $A_i=\{$恰有i人击中$\}$, $i=0,1,2,3$, $A=\{$甲击中$\}$, $B=\{$乙击中$\}$, $C=\{$丙击中$\}$, $D=\{$飞机被击落$\}$.
A_0,A_1,A_2,A_3 是 S 的一个划分, 且 $P(D|A_0)=0$, $P(D|A_1)=0.2$, $P(D|A_2)=0.6$, $P(D|A_3)=1$.
全概率公式 $P(D)=\sum_{i=0}^{3}P(D|A_i)P(A_i)$.

- $A_0=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

$$P(A_0)=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=0.6\times 0.5\times 0.3=0.09.$$

- $A_1=A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$. 互斥

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)\\&=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)\\&=0.36\end{aligned}$$

- $A_2 = AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

$$
\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) \\
&= 0.41.
\end{aligned}
$$

- $A_3 = ABC$.

$$P(A_3) = P(A)P(B)P(C) = 0.14.$$

$$
\begin{aligned}
P(D) &= P(D|A_0)P(A_0) + P(D|A_1)P(A_1) + \\
&\qquad P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) \\
&= 0.458.
\end{aligned}
$$

$\square$