

## Lec-6. 分布函数、连续型随机变量

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主    页：[wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 目录

## 1. 分布函数

## 2. 连续型随机变量

## 3. 典型连续型随机变量

- 均匀分布
- 指数分布
- 正态分布

## 随机变量的分布函数

- 对于离散型随机变量，可以用分布律来刻画，比如：表格和概率公式.
- 如何刻画非离散型随机变量？

## 随机变量的分布函数

- 对于离散型随机变量，可以用分布律来刻画，比如：表格和概率公式.
- 如何刻画非离散型随机变量？ $\Rightarrow$  分布函数.

## 分布函数

### 定义

设  $X$  是一个随机变量, 函数

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

为  $X$  的概率分布函数, 简称**分布函数**.

注

(1)  $F(X)$  是增函数, 定义域是  $\mathbb{R}$ ;

## 注

- (1)  $F(X)$  是增函数，定义域是  $\mathbb{R}$ ;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;

## 注

- (1)  $F(X)$  是增函数, 定义域是  $\mathbb{R}$ ;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;



## 注

- (1)  $F(X)$  是增函数, 定义域是  $\mathbb{R}$ ;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;
- (4) 分布函数的几何意义:  $F(x)$  的值表示  $X$  落在  $(-\infty, x]$  上的概率;

## 注

- (1)  $F(X)$  是增函数, 定义域是  $\mathbb{R}$ ;
- (2) 任何随机变量都有相应的分布函数;
- (3) 不同的随机变量, 它们的分布函数可以相同;
- (4) 分布函数的几何意义:  $F(x)$  的值表示  $X$  落在  $(-\infty, x]$  上的概率;
- (5) 分布函数的用途: 可以给出随机变量  $X$  落入任意一个范围的可能性.

$X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  
则

- $$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

$X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  
则

- $$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\}$$
$$= F(b) - F(a).$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$

$X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  
则

- $$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\}$$
$$= F(b) - F(a).$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$
- $$P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} - P\{X = b\}$$
$$= F(b) - F(a) - P\{X = b\}.$$

$X$  的分布函数为  $F(x)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  
则

- $$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\}$$
$$= F(b) - F(a).$$
- $$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a).$$
- $$P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} - P\{X = b\}$$
$$= F(b) - F(a) - P\{X = b\}.$$
- $$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X \leq b\} + P\{X = a\}$$
$$= F(b) - F(a) + P\{X = a\}.$$

例

设  $X$  的分布律为

$X$	-1	2	3
$P_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求

(1)  $X$  的分布函数,

(2)  $P\{X \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\}$ ,  $P\{2 \leq X \leq 3\}$ .

解:(1) 当  $x < -1$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x < -1\} = 0$$

当  $-1 \leq x < 2$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}$$

当  $2 \leq x < 3$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} = \frac{3}{4}$$

当  $x \geq 3$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1; \\ \frac{1}{4} & -1 \leq x < 2; \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3; \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$



$$\text{解: (2) } P\{X \leq \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\} = \frac{3}{4}. \quad \square$$

## 离散型随机变量的分布函数

一般, 设离散型  $X$  的分布律为  $P\{X = x_k\} = p_k$ , 则  $X$  的分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

分布函数不连续, 在  $x = x_k$  处有跳跃, 跳跃值为  $p_k = P\{X = x_k\}$ .

例

设随机变量  $X$  的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1; \\ 0.2 & -1 \leq x < 3; \\ 0.6 & 3 \leq x < 4; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

求  $X$  的分布律.

解:  $F(x)$  只在  $-1, 3, 4$  跳跃, 跳的幅度分别是  $0.2, 0.4, 0.4$ . 所以, 分布律为

$X$	$-1$	$3$	$4$
$P$	$0.2$	$0.4$	$0.4$

## 离散型随机变量的分布函数的性质

### 性质

设  $X$  是离散型随机变量,  $F(X)$  是  $X$  的分布函数. 则

**(1)**  $0 \leq F(x) \leq 1;$

## 离散型随机变量的分布函数的性质

### 性质

设  $X$  是离散型随机变量,  $F(X)$  是  $X$  的分布函数. 则

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;

(2)  $F(x)$  单调不减, 即对任意  $x_1 < x_2$ , 有  
 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$ ;

## 离散型随机变量的分布函数的性质

### 性质

设  $X$  是离散型随机变量,  $F(X)$  是  $X$  的分布函数. 则

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;

(2)  $F(x)$  单调不减, 即对任意  $x_1 < x_2$ , 有  
 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$ ;

(3)  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ ;

## 离散型随机变量的分布函数的性质

### 性质

设  $X$  是离散型随机变量,  $F(X)$  是  $X$  的分布函数. 则

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;

(2)  $F(x)$  单调不减, 即对任意  $x_1 < x_2$ , 有  
 $F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$ ;

(3)  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ ;

(4)  $F(x)$  是右连续函数, 即  
 $F(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} F(x + \Delta x) = F(x)$ .  
但  $F(x)$  不一定是连续函数.



## 例

一个靶子是半径为  $2m$  的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比, 并设射击都能中靶, 以  $X$  表示弹着点与圆心的距离, 求  $X$  的分布函数.

解: 当  $x < 0$  时,  $\{X \leq x\}$  是不可能事件, 于是

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 0,$$

当  $0 \leq x \leq 2$  时,

$$P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2.$$

取  $x = 2$ , 有  $P\{0 \leq X \leq 2\} = k \cdot 2^2$ , 而  
 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$ , 则  $k = \frac{1}{4}$ , 即

$$P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$

从而

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$

当  $x \geq 2$  时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1.$$

$$\text{故 } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x^2}{4} & 0 \leq x < 2; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

图像为一连续曲线.

□

本题中, 分布函数  $F(x)$  可写为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

$$\text{其中 } f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 < t < 2; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

即  $F(x)$  是非负函数  $f(t)$  在区间  $(-\infty, x]$  上的积分. 此时, 称  $X$  为连续型随机变量. (使得  $F(X)$  连续的随机变量)

## 连续型随机变量及其概率密度

### 定义

若对于随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 存在非负可积函数  $f(x)$ , 使得对于任意实数  $x$  有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

则称  $X$  为连续型随机变量.  $f(x)$  称为  $X$  的概率密度函数, 简称概率密度.

## 连续型随机变量及其概率密度

### 定义

若对于随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)$ , 存在非负可积函数  $f(x)$ , 使得对于任意实数  $x$  有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

则称  $X$  为**连续型随机变量**.  $f(x)$  称为  $X$  的**概率密度函数**, 简称**概率密度**.

改变概率密度  $f(x)$  的个别点的取值不影响  $F(x)$  的取值.  
( $\Rightarrow$  注3不同的随机变量可以有相同的分布函数.)

## 性质

设  $f(x)$  是连续型随机变量  $X$  的概率密度, 则

(1)  $f(x) \geq 0$ ;

(2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ ;

(3)  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \leq x_2$ ,

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$



- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0, \text{ 且}$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0,$  且

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $\{X = a\}$  是不可能事件  $\Rightarrow P\{X = a\} = 0;$   
而  $P\{X = a\} = 0 \not\Rightarrow \{X = a\}$  是不可能事件;

- $P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx;$
- $P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = \int_a^{+\infty} f(x) dx;$
- $\forall a \in \mathbb{R}, P\{X = a\} = 0,$  且

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\};$$

- $\{X = a\}$  是不可能事件  $\Rightarrow P\{X = a\} = 0;$   
而  $P\{X = a\} = 0 \not\Rightarrow \{X = a\}$  是不可能事件;
- 对于连续型随机变量  $X,$

$$P\{X \in D\} = \int_D f(x) dx, \quad \forall D \subset \mathbb{R}.$$

## 性质

设  $f(x)$  是连续型随机变量  $X$  的概率密度, 则

(4) 在  $f(x)$  的连续点  $x$ ,  $F'(x) = f(x)$ , 即

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

其中  $P\{x < X \leq x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x$  表示  $X$  落在  $x$  附近  $(x, x + \Delta x]$  上的概率近似等于  $f(x)\Delta x$ .

## 注

(1)  $f(x_2) > f(x_1)$  表示落在  $x_2$  附近的概率大于落在  $x_1$  附近的概率, 而不是取  $x_2$  的概率大于取  $x_1$  的概率;

(2)  $f(x)$  的值是可以大于 1;

(3)  $f(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{\int_{-\infty}^x f(t) dt} \\ \xleftarrow{\frac{d}{dx} F(x)} \end{array} F(x).$

## 例

设随机变量  $X$  具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x < 3; \\ 2 - \frac{x}{2} & 3 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 确定常数  $k$ .
- (2) 求  $X$  的分布函数  $F(x)$ .
- (3) 求  $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}$ .

解: (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , 得  $k = \frac{1}{6}$ .

(2)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x^2}{12} & 0 \leq x < 3; \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4} & 3 \leq x < 4; \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

(3)  $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\} = F(\frac{7}{2}) - F(1) = \frac{41}{48}$ . □

例

设连续型随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ \frac{x}{3} & 0 \leq x < 3; \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

求  $X$  的概率密度  $f(x)$ .

$$\text{解: } f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 < x < 3; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

□



## 均匀分布

### 定义

若  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

则称  $X$  在  $(a, b)$  上服从**均匀分布**, 记为  $X \sim U(a, b)$ .

## 性质

均匀分布具有等可能性.

即  $\forall a < k < k + l < b$ , 均有

$$P\{k < X < k + l\} = \int_k^{k+l} \frac{1}{b-a} dt = \frac{l}{b-a},$$

与  $k$  无关, 仅与  $l$  有关. 即服从  $U(a, b)$  上的均匀分布的  $X$  落入  $(a, b)$  中任意子区间上的概率只与区间长度有关, 与区间所处位置无关. 即  $X$  落入  $(a, b)$  中的等长度的任意子区间上是等可能的.

若  $X \sim U(a, b)$ , 则  $P\{a < X < b\} = 1$ ,  
且分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b; \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

当  $a \leq x \leq b$  时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

## 例

在区间  $(-1, 2)$  上随机取一数  $X$ , 求

- (1) 写出  $X$  的概率密度函数;
- (2) 该数在  $(-0.5, 1)$  中的概率;
- (3) 该数为正数的概率.

## 例

在区间  $(-1, 2)$  上随机取一数  $X$ , 求

- (1) 写出  $X$  的概率密度函数;
- (2) 该数在  $(-0.5, 1)$  中的概率;
- (3) 该数为正数的概率.

解:(1)  $X$  在  $(-1, 2)$  上服从均匀分布, 故

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & -1 < x < 2; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) P\{-0.5 < X < 1\} = \int_{-0.5}^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$(3) P\{X > 0\} = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

□

## 均匀分布的概率计算

若  $X \sim U(a, b)$ , 则  $\forall I \subset \mathbb{R}$ , 有

法一:

$$P\{X \in I\} = \int_I f(x) dx,$$

法二:

$$P\{X \in I\} = \frac{I \cap (a, b) \text{ 的长度}}{(a, b) \text{ 的长度}}.$$

## 指数分布

### 定义

若  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

其中  $\theta > 0$  为常数, 则称  $X$  服从参数为  $\theta > 0$  的**指数分布**. 记为  $X \sim E(\theta)$ .

$$\text{分布函数: } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

## 性质

指数分布具有无记忆性. 即  $\forall s, t > 0$ , 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$



## 性质

指数分布具有无记忆性. 即  $\forall s, t > 0$ , 有

$$P\{X > s + t | X > s\} = P\{X > t\}.$$

证明:

$$\begin{aligned} P\{X > s + t | X > s\} &= \frac{P\{\{X > s + t\} \cap \{X > s\}\}}{P\{X > s\}} \\ &= \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}} = \frac{1 - F(s + t)}{1 - F(s)} \\ &= e^{-\frac{t}{\theta}} = P\{X > t\} \quad \square \end{aligned}$$

若把  $X$  记为一元件的寿命. 已知元件使用了  $s$  小时, 总共能使用至少  $s + t$  小时的概率与从开始使用时算起它至少能使用  $t$  小时的概率相等. 元件对它已使用过  $s$  小时没有记忆.

## 例

设某人电话通话时间  $X$  (分钟) 服从指数分布, 概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} e^{-\frac{x}{15}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

求

- (1) 他通话时间在 10 ~ 20 分钟之间的概率.
- (2) 若他已打了 10 分钟, 求他继续通话超过 15 分钟的概率.(即, 若他已打了 10 分钟, 求他总共通话超过 25 分钟的概率).

解: (1)  $P\{10 < X < 20\} = \int_{10}^{20} f(x) dx = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{4}{3}}.$

利用分布函数  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{15}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$

$$P\{10 < X < 20\} = F(20) - F(10) = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{4}{3}}.$$

(2) 指数分布无记忆性.

$$\begin{aligned} P\{X > 25 | X > 10\} &= P\{X > 15\} \\ &= \int_{15}^{+\infty} f(x) dx = e^{-1} \quad \square \end{aligned}$$

## 例

设一地段相邻两次交通事故的间隔时间 (小时)  $X$  服从参数为  $\frac{13}{2}$  的指数分布. 求已知在过去的 13 小时中没有发生交通事故, 那么在未来的 2 小时内不发生事故的概率.

## 例

设一地段相邻两次交通事故的间隔时间 (小时)  $X$  服从参数为  $\frac{13}{2}$  的指数分布. 求已知在过去的 13 小时中没有发生交通事故, 那么在未来的 2 小时内不发生事故的概率.

解:  $X \sim E(\theta)$ ,  $\theta = \frac{13}{2}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{13} e^{-\frac{2x}{13}} & x > 0; \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } P\{X > 15 | X > 13\} &= P\{X > 2\} \\ &= \int_2^{+\infty} f(x) dx = 1 - F(2) = e^{-\frac{4}{13}}. \end{aligned}$$

□

## 指数分布的用途

- 表示独立随机事件发生的间隔, 比如旅客进机场的时间间隔、维基百科新条目出现的时间间隔等等.
- 在排队登记中, 一个顾客接受服务的时间长短也可用指数分布近似.
- 无记忆性的现象 (连续时).

下次课介绍正态分布！