线性代数-10

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 7 日

本次课内容

1. 线性方程组解的存在性

2. 习题课

引入

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B=(A_{m\times n},\boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 解线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$: 使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A,\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{\text{有限次行变换}}\text{行最简形}$$

则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$.
  则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 解线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$：使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{有限次行变换}} \text{行最简形}$$

  则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解.
- $$R(A) \le R(A, \boldsymbol{\beta}) \le R(A) + 1$$

引入

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B=(A_{m\times n},\boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 解线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$: 使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A,\boldsymbol{\beta})\xrightarrow{\text{有限次行变换}}\text{行最简形}$$

则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

- $$R(A)\le R(A,\boldsymbol{\beta})\le R(A)+1$$
  - 当 $R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)+1$ 时, 产生矛盾方程, 则方程组无解;

引入

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 解线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$: 使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{有限次行变换}} \text{行最简形}$$

则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解.

- $$R(A) \leq R(A, \boldsymbol{\beta}) \leq R(A) + 1$$
    - 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) + 1$ 时, 产生矛盾方程, 则方程组无解;
    - 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ 时, A 列满秩, 则方程组有唯一解;

- 设线性方程组 $A_{m\times n}X_n = \boldsymbol{\beta}_m$ 的增广矩阵为 $B = (A_{m\times n}, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则对线性方程组进行消元化简 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 B 作初等行变换.
- 解线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$: 使用初等行变换化简增广矩阵,

$$(A, \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{有限次行变换}} \text{行最简形}$$

  则行最简形对应的线性方程组的解即为原方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的解.
-

$$R(A) \le R(A, \boldsymbol{\beta}) \le R(A) + 1$$

  - 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) + 1$ 时, 产生矛盾方程, 则方程组无解;
  - 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) = n$ 时, A 列满秩, 则方程组有唯一解;
  - 当 $R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A) < n$ 时, 有自由未知量, 则方程组有无穷解.

秩的应用：判断线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\boldsymbol{\beta}$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\boldsymbol{\beta})$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})<n$.

秩的应用：判断线性方程组 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

秩的应用：判断线性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\boldsymbol{\beta}$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\boldsymbol{\beta})$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})$;
    - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})=n$;
    - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\boldsymbol{\beta})<n$.

推论

齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- $X=0$ 是任意齐次线性方程组 $AX=0$ 的解.
- 求解 $AX=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 $(A,\boldsymbol{\beta})$ 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例

设

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 & = \lambda \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

秩的应用：判断矩阵方程 $AX = B$ 解的存在性.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

例

求解矩阵方程 $AX = 2X + A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1、 判断线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 解的存在性，并求解.

2、 判断矩阵方程 $AX = B$ 解的存在性，并求解.

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

补充：矩阵的秩和方阵的等价分类

思考题：设 A, B 都为 n 阶方阵. 若 $A \sim B$, 则称 A 和 B 属于同一个等价类. 问 n 阶方阵全体有多少个等价类?

- $n+1$ 个等价类, 且每一个等价类里的标准形分别是:

$$R_0 = O, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, R_n = E_n.$$

补充：矩阵的秩和方阵的等价分类

1. 设 A 为 n 阶方阵,

- $R(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$;
- $R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量
  $\Leftrightarrow A$ 的任意两行（两列）成比例;
- $R(A) = n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \sim E$.

2. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,

- $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
- $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量 $\Leftrightarrow$ 行列成比例.

- $R(A_{m\times n})=n \Leftrightarrow A$ 列满秩

$\Leftrightarrow A\sim\binom{E_n}{O} \Leftrightarrow A\overset{r}{\sim}\binom{E_n}{O}$

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $PA=\binom{E_n}{O}$

$\Rightarrow$ 左消去律成立: 若 $AX=AY \leftrightarrow X=Y$,

或 $AX=0 \leftrightarrow X=0$.

例题

例

$R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量.

例

$R(A) = 1 \Leftrightarrow A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量.

例

秩 $R(A) = r$ 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

例

$R(A)=1 \Leftrightarrow A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量.

例

秩 $R(A)=r$ 的矩阵可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

例

A 列满秩, $AB=C$. 证明：$BX=0$ 和 $CX=0$ 同解.

补充：秩和伴随矩阵

3. 设 A 为 n 阶方阵, 则

- $R(A) = n \Leftrightarrow R(A^*) = n, A^* = |A| \cdot A^{-1}, |A^*| = |A|^{n-1}$;
- $R(A) = n - 1 \Leftrightarrow R(A^*) = 1$;
- $R(A) < n - 1 \Leftrightarrow A^* = O$.

4. 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例 (秩的性质 8)

若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$，则 $R(A) + R(B) \leq n$.

证明：

$$\begin{aligned} R(A) + R(B) &= R\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \leq R\begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= n \end{aligned}$$

几种矩阵的幂

5. 设 A 为 n 阶方阵,

- 若存在 n 使得 $A^n = A$, 则称 A 为幂等矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = E$, 则称 A 为幂幺矩阵.
- 若存在 n 使得 $A^n = O$, 则称 A 为幂零矩阵.

例

求下面矩阵的幂矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 二项式展开: $(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$.

作业

(a). 用初等变换求解矩阵方程 $AX = 3X + A$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b). $\boldsymbol{\lambda}$ 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + \boldsymbol{\lambda} x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + x_2 + \boldsymbol{\lambda} x_3 & = \boldsymbol{\lambda} - 1, \end{cases}$$

① 有唯一解; ② 无解; ③无穷多个解.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 7 日