线性代数-11

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 9 日

本次课内容

1. 向量组的线性表示

2. 向量组的线性相关性

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

  - 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合.
    例如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组,
    记为 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

- 将线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\boldsymbol{\beta}_m$ 的系数矩阵 A 进行列分块,

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),$$

则线性方程组可以表示为向量形式,

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

  - 向量组: 若干个同维数的列向量 (行向量) 所组成的集合. 例如 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是一个含 n 个 m 维向量的向量组, 记为 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.
  - 线性组合: 形如

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

的表达式称为向量组 A 的一个线性组合.

向量的线性表示

- 若
$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$
则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解

- 若
$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$
则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示.
- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n).$$

- 若

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示.

- $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow AX = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)X_n = \boldsymbol{\beta}$ 有解
$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$.

定理 (定理 1)

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \boldsymbol{\beta}) = R(A)$.

注：任意有序的向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 都对应矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$. 为方便，我们把矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 也记为 A.

例

设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

证明向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，并求出表达式.

解法：求解线性方程组 $AX = \beta$,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形}.$$

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示

向量组的线性表示

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 向量组 B 中每一个向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 A 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A,B)=R(A)$.

定理 (定理 2)

向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
$\Leftrightarrow$ $R(A,B)=R(A)$.

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.
- 向量组 A, B 等价

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.
- 向量组 A, B 等价
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.
- 向量组 A, B 等价
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$

向量组的等价

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.
- 向量组 A, B 等价
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B)$.

- 若向量组 A, B 可以相互线性表示, 则称向量组 A, B 等价.
- 向量组 A, B 等价
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 和 $BY = A$ 都有解
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(B, A)$
  $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B) = R(B, A) = R(B)$.

推论

向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 和向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 等价
$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, B) = R(B)$.

例 2

例

设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

证明向量组 α_1,α_2 和向量组 β_1,β_2,β_3 等价.

思路：求 $R(A), R(A,B), R(B)$,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\text{行最简形}.$$

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$

控" 秩" 定理

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
  $\Rightarrow R(B)\leq R(A,B)=R(A)$.

控"秩"定理

- 向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
  $\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 有解
  $\Leftrightarrow R(A,B)=R(A)$
  $\Rightarrow R(B)\le R(A,B)=R(A)$.

定理 (定理 3)

向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示
$\Rightarrow R(B)\le R(A)$.

例 3

例 (例 3)

设 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$, n 阶单位矩阵 $E=(e_1,\cdots,e_n)$ 的列向量称为单位坐标向量.
证明 $e_1,\cdots,e_n$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

例 (例 3)

设 n 维向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,
n 阶单位矩阵 $E=(e_1,\cdots,e_n)$ 的列向量称为单位坐标向量.
证明 $e_1,\cdots,e_n$ 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

注:

- 矩阵描述: 存在矩阵 K, 使得 $AK=E_n \Leftrightarrow R(A)=n$;
- 矩阵方程描述: $AX=E$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定义

给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

定义

给定向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = O,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1 = \cdots = k_n = 0$ 时, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = O$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n = O$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n = O$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$.

定义

给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 若存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O,$$

则称向量组 A 线性相关.
若仅当 $k_1=\cdots=k_n=0$ 时, $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O$ 才成立, 则称向量组 A 线性无关.

- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow AX_n=O$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$;
  向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow AX_n=O$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

定理 (定理 4)

向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<n$;
向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

例 4

例

讨论 n 维单位坐标向量 $e_1, \cdots, e_n$ 的线性相关性.

例 5

例

设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关性.

例 6

例

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$$\begin{cases} \beta_1 & = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_2 & = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 & = \alpha_3 + \alpha_1 \end{cases}$$

证向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例 6

例

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 & = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 & = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_3 & = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1 \end{cases}$$

证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明 1: 设有 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 = O$$

$$\underline{\cdots\cdots}$$

得 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. 故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX=\boldsymbol{\beta}$，$R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$，$A$ 列满秩，则有唯一解.

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX=\boldsymbol{\beta}$，$R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$，$A$ 列满秩，则有唯一解.

定理 (定理 5)

1、 若向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量组 $B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 也线性相关；若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

2、 设 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 包含 m 个 n 维向量，若 $m>n$，则向量组 A 线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

3、 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$B:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 A 线性表示，且表达式唯一.

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关；
  整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关.
- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关；短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关.
- $AX=\boldsymbol{\beta}$，$R(A,\boldsymbol{\beta})=R(A)=m$，$A$ 列满秩，则有唯一解.

向量个数角度:

- 部分线性相关 $\Rightarrow$ 整体线性相关;

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\text{线性相关} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}\text{线性相关}.$$

- 整体线性无关 $\Rightarrow$ 部分线性无关;

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}\text{线性无关} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}\text{线性无关}.$$

向量维数角度:

- 长尾相关 $\Rightarrow$ 短尾相关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \color{red}{x_4} \\ \color{red}{x_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \color{red}{y_4} \\ \color{red}{y_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \color{red}{z_4} \\ \color{red}{z_5} \end{pmatrix} \text{长尾相关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾相关}.$$

- 短尾无关 $\Rightarrow$ 长尾无关;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{短尾无关} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \color{red}{x_4} \\ \color{red}{x_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \color{red}{y_4} \\ \color{red}{y_5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \color{red}{z_4} \\ \color{red}{z_5} \end{pmatrix} \text{长尾无关}.$$

例

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 证明:

- α_1 可由 α_2,α_3 线性表示;
- α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
  $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_n$ 使得
  $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O,$$
  $\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n=O$ 有非零解
  $\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的秩小于列向量的个数, $R(A)<n$
  $\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

- 向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关
$\Leftrightarrow$ 若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=O$, 则必有
$$k_1=\cdots=k_n=0$$
$\Leftrightarrow$ n 元齐次线性方程组 $AX_n=O$ 只有零解
$\Leftrightarrow$ 矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的秩等于列向量的个数, $R(A)=n$, 列满秩
$\Leftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

小结

第二、三两章是用矩阵语言来描述线性方程组, 而这一章是用向量语言 (几何语言) 来描述线性方程组.

- 向量组、线性组合、线性表示、向量组的等价、线性相关和线性无关;
- 判断是否可以线性表示、是否等价、是否线性相关和线性无关.
- 5 个定理: 联系线性方程组解的存在性和秩的关系.

作业

- Page109-Page110: 2, 4, 8, 9, 10.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 9 日