线性代数-16

主讲: 吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 29 日

本次课内容

1. 特征值和特征向量的定义

2. 特征值的性质

3. 特征向量的性质

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

$\Leftrightarrow$ $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 有非零解 X

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

$\Leftrightarrow$ $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 有非零解 X

$\Leftrightarrow$ $R(A - \boldsymbol{\lambda} E) < n \Leftrightarrow |A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

$\Leftrightarrow$ $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 有非零解 X

$\Leftrightarrow$ $R(A - \boldsymbol{\lambda} E) < n \Leftrightarrow |A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$ 的解.

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

$\Leftrightarrow$ $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 有非零解 X (特征向量为 $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 的非零解)

$\Leftrightarrow$ $R(A - \boldsymbol{\lambda} E) < n \Leftrightarrow |A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$ 的解.

特征值和特征向量

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 $\boldsymbol{\lambda}$ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \boldsymbol{\lambda} X,$$

则称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量.

- 存在非零向量 X 满足 $AX = \boldsymbol{\lambda} X$

$\Leftrightarrow$ $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 有非零解 X (特征向量为 $(A - \boldsymbol{\lambda} E)X = 0$ 的非零解)

$\Leftrightarrow$ $R(A - \boldsymbol{\lambda} E) < n \Leftrightarrow |A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$ 的解.

- 特征多项式: $f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} E|$; 特征方程: $f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$.

求特征向量

设 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A - \boldsymbol{\lambda}_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的特征向量.

求特征向量

设 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A - \boldsymbol{\lambda}_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

设 $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_i$ 为矩阵 A 的一个特征值, 则

$$(A-\boldsymbol{\lambda}_i E)X=0$$

的任意非零解 $X=P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解法: 1. 求特征多项式 $f(\boldsymbol{\lambda})=|A-\boldsymbol{\lambda}E|$, 解 $f(\boldsymbol{\lambda})=0$ 得特征值;

2. 依次解齐次线性方程组 $(A-\boldsymbol{\lambda}_i E)X=0$ 的非零解, 得特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 对应的特征向量.

特征值的性质

- 代数基本定理: 一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

在复数域内有 n 个解 (重根按重数计).

- 设 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为特征方程 $|A - \boldsymbol{\lambda} E| = 0$ 的 n 个解, 则

$$|A - \boldsymbol{\lambda} E| = (-1)^n (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_1)(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_2) \cdots (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_n)$$

性质

n 阶方阵 A 有 n 个特征值 (计重数).

相似不变量：相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征值相同.

相似不变量：相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征值相同.

- n 阶矩阵 A, B 的特征值相同，但 A 和 B 不一定相似. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

性质

(i) $tr(A) = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n$;

(ii) $|A| = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2\cdots\boldsymbol{\lambda}_n$;

(iii) A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 无零特征值.

特征值

性质

(i) $tr(A) = \boldsymbol{\lambda}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n$;

(ii) $|A| = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2 \cdots \boldsymbol{\lambda}_n$;

(iii) A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 无零特征值.

性质

如果 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则

(i) $tr(A) = tr(B)$;

(ii) $|A| = |B|$;

(iii) A 和 B 等价，从而 $R(A) = R(B)$. 特别地，A 可逆当且仅当 B 可逆.

例

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\Lambda=\begin{pmatrix}5 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}$ 相似, 求 x.

例 (例 7)

设 $\boldsymbol{\lambda}$ 为方阵 A 的特征值, 证明:

(1) $c\boldsymbol{\lambda}$ 为 cA 的特征值;

(2) $\boldsymbol{\lambda}^k$ 为 A^k 的特征值;

(3) 设 $\boldsymbol{\varphi}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, 则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})$ 为 $\boldsymbol{\varphi}(A)$ 的特征值;

(4) 当 A 可逆时, $\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 A^{-1} 的特征值. $\frac{|A|}{\boldsymbol{\lambda}}$ 为 A^* 的特征值.

例 (例 8)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $A^* + 3A - 2E$ 的特征值和行列式.

特征向量的性质: 不同特征值对应的特征向量线性无关

定理 (定理 2)

设 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_m$ 为方阵 A 的 m 个特征值, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 依次为与之对应的特征向量. 若 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_m$ 互不相同, 则 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 线性无关.

推论

设 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为方阵 A 的两个不同特征值, $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 分别是关于 $\boldsymbol{\lambda}_1$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_2$ 的线性无关的特征向量, 则
$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关.

例子

例 (例 6)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和线性无关的特征向量.

例 (例 6)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的特征值和线性无关的特征向量.

- $\boldsymbol{\lambda}_i$ 是 A 的一个特征值, 则齐次线性方程组 $(A-\boldsymbol{\lambda}_i E)X=0$ 的基础解系就是矩阵 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的全体特征向量的一个最大无关组.

例子

例 (例 9)

设 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为方阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 P_1, P_2, 证明 $P_1 + P_2$ 不是 A 的特征向量.

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathit{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 相似, 则 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为 A 的特征值.

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 相似, 则 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).

相似对角化

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 相似, 则 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 相似, 则 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则称 A 可以相似对角化(或对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 若 n 阶矩阵 A 和 B 都可相似对角化, 则 A 和 B 相似当且仅当他们特征值相同.

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 相似，则 $\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 可以相似对角化(或对角化).
- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化，比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 若 n 阶矩阵 A 和 B 都可相似对角化，则 A 和 B 相似当且仅当他们特征值相同.
- 对角化问题：是否存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

小结

- 相似不变量: 特征多项式、特征值、行列式、迹、阶次、秩.
- 相似不变性: 可逆.
- 计算特征值和特征向量.
- 特征值的性质:
  - n 阶矩阵的特征值有 n 个 (计重数), 且有可能为复数;
  - 相似的矩阵有相同的特征值、迹、行列式;
  - 矩阵多项式的特征值是特征值的多项式.
- 特征向量的性质:
  - 不同特征值对应的特征向量线性无关.
- 下次课: 方阵的相似对角化和对称阵的正交相似对角化.

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

作业

- 思考题：两个相似矩阵的特征向量一定一样吗？为什么？(假设矩阵 A 和 B 相似，$\boldsymbol{\lambda}$ 为他们的一个特征值. 若 $A\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，那么 $B\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$? 若不成立，尝试思考矩阵 B 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量和矩阵 A 关于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量之间的关系.)
- Page$_{139}$: 6-(1)、9、13.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 29 日