线性代数-17

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 31 日

本次课内容

1. 方阵的相似对角化

2. 实对称矩阵的正交相似对角化

定义

若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

为对角阵, 则称 A可以相似对角化(或可对角化).

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda}$$

为对角阵, 则称 A可以相似对角化(或可对角化).

- 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化, 比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 对角化问题: 是否存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

引入

- 矩阵 A 可相似对角化

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

引入

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP = P\boldsymbol{\Lambda}$.

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP = P\Lambda$.令 $P = (P_1, \cdots, P_n)$, 则

$$A(P_1, \cdots, P_n) = (P_1, \cdots, P_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 P_1, \cdots, \lambda_n P_n)$$

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP=P\boldsymbol{\Lambda}$.令 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 则

$$
\begin{aligned}
A(P_1,\cdots,P_n) &= (P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda}_n\end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{\lambda}_1P_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_nP_n)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i=\boldsymbol{\lambda}_iP_i,\ i=1,2,\cdots,n$, $P_1,\cdots,P_n$ 线性无关.

- 矩阵 A 可相似对角化

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 为对角阵.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, 使得 $AP=P\Lambda$.令 $P=(P_1,\cdots,P_n)$, 则

$$
\begin{aligned}
A(P_1,\cdots,P_n)&=(P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\\
&=(\lambda_1P_1,\cdots,\lambda_nP_n)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$ $AP_i=\lambda_iP_i,\ i=1,2,\cdots,n,\ P_1,\cdots,P_n$ 线性无关.

$\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

可对角化

定理 (可对角化)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 (可对角化)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

定理 (可对角化)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.

定理 (可对角化)

n 阶方阵 A 可相似对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

- 存在不可对角化矩阵，比如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- 若 n 阶方阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 可对角化.
- 对称矩阵可以对角化.
- 若 n 阶方阵 A 可相似对角化，则可通过求 A 的所有线性无关特征向量来求可逆阵 P.
- 可逆阵 P 不唯一，并且可能是复矩阵.

例题

例 (例 10)

问矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

是否可对角化? 若能,

1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$;
2) 求 $\varphi(A) = A^3 + 2A^2 - 3A$. (与 P43 例 15 对比)

例 (例 10)

问矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

是否可对角化？若能，

1) 求可逆阵 P 和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$;
2) 求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$. （与 P43 例 15 对比）

解法：1. 求特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$, 由 $f(\lambda)=0$ 得特征值;
2. 依次解 $(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系，得特征值 λ_i 对应的特征向量;
3. 给出可逆阵 P.

例 (例 11)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

例 (例 11)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 n_i；$(A-\boldsymbol{\lambda}_i E)X=0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i=n-R(A-\boldsymbol{\lambda}_i E)$. 则

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$，都有 $n_i=m_i$.

例 (例 11)

问 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可对角化.

- 设 n 阶矩阵 A 的每个特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的重数为 n_i；$(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)X=0$ 的基础解系包含向量的个数为 $m_i=n-R(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)$. 则

$$A \text{ 可对角化} \Leftrightarrow \text{对每个特征值 } \boldsymbol{\lambda}_i\text{，都有 } n_i=m_i.$$

- n_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的代数重数，m_i 称为特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的几何重数.

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A可以正交相似对角化.

定义

若存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$$

为对角阵, 则称矩阵 A可以正交相似对角化.

- 正交相似对角化问题: 是否存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP$$

为对角阵.

定理 (定理 5)

设 A 为实矩阵，则 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

实对称的正交相似对角化

定理 (定理 5)

设 A 为实矩阵，则 A 可正交相似对角化 $\Leftrightarrow A = A^T$.

- 性质 1：实对称阵的特征值必为实数.
- 性质 2：实对称阵的不同特征值对应的特征向量必正交.
- 性质 3：实对称阵的每个特征值的代数重数与几何重数相等.

例 (例 12)

设矩阵
$$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$
求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\mathbf{\Lambda}$ 为对角阵.

例 (例 12)

设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

求一个正交阵 P, 使 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

解法：1. 计算 $|A-\boldsymbol{\lambda}E|$, 求 A 的特征值;

2. 求 $(A-\boldsymbol{\lambda}_iE)X=0$ 的基础解系, 得 A 的线性无关特征向量;

3. 将基础解系正交化、单位化;

4. 写 $P^{-1}AP=P^TAP=\boldsymbol{\Lambda}$, 注意特征值与特征向量对应顺序.

实对称矩阵的多项式

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^{T}$.

- A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{T}$.

例 (例 13)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求 A^n.

下次课预告：二次型和对称矩阵

例 (P53 习题 1-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

例 (P53 习题 1-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

- 二次型 $f(X) = X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- Section-5、6、7 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得
  $$f(X) = f(PY) = Y^TP^TAPY = k_1y_1^2 + \cdots + k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P，使得 P^TAP 为对角阵.

例 (P53 习题 1-(5))

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

- 二次型 $f(X)=X^TAX$ 和对称阵 A 一一对应.
- **Section-5、6、7** 的中心任务: 化简二次型/对称阵.
  寻找可逆 (正交) 线性变换 $X=PY$, 使得
  $$f(X)=f(PY)=Y^TP^TAPY=k_1y_1^2+\cdots+k_ny_n^2$$
  矩阵语言：寻找可逆 (正交) 阵 P, 使得 P^TAP 为对角阵.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)) \cdot P^T$.

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

  $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

  $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

  $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathbf{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.

- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

小结

- 方阵相似对角化;
  - n 阶矩阵 A 可相似对角化

    $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵

    $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关特征向量

    $\Leftrightarrow$ 每个特征值的重数 $=$ 这个特征值对应的线性无关特征向量的个数 (代数重数 $=$ 几何重数)
  - 若 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可对角化
  - 若 A 为对称矩阵, 则 A 可对角化
  - 若存在可逆矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(f(\boldsymbol{\Lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^{-1}$.
- 实对称阵的正交相似对角化.
  - A 为对称矩阵, 若存在正交矩阵 P, 使得

    $$P^{-1}AP = P^TAP = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n),$$

    则 $f(A) = P \cdot \mathbf{diag}(f(\boldsymbol{\lambda}_1), f(\boldsymbol{\lambda}_2), \cdots, f(\boldsymbol{\lambda}_n)) \cdot P^T$.

作业

- Page$_{139}$-Page$_{140}$：16、19-2、20、23、24、26-2.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 10 月 31 日