线性代数-18

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 11 月 5 日

本次课内容

1. 二次型和对称矩阵
2. 二次型的化简
3. 对称矩阵的合同
4. 正定性

例 (P53 习题 1-(5))

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3
\end{aligned}
$$

含 n 个变量二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为二次型.

含 n 个变量二次齐次函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n
\end{aligned}
$$

称为二次型.

- 二次型的求和号表示:

$$
f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.
$$

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型通常简记为$f(X) = X^T A X$, 其中 A 为对称矩阵.

二次型和对称矩阵

- 二次型的矩阵表示:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
&\qquad +2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- 二次型通常简记为$f(X)=X^TAX$, 其中 A 为对称矩阵.
- 二次型的秩被定义为对称矩阵 的秩, i.e. $R(f)=R(A)$.

- 对任意矩阵 A,

$$f(X) = X^TAX = X^T\frac{A^T + A}{2}X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X) = X^T\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}X = X^T\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\3 & 5 & 7\\5 & 7 & 9\end{pmatrix}X$$

- 对任意矩阵 A,

$$f(X)=X^TAX=X^T\frac{A^T+A}{2}X,$$

其中 $\frac{A^T+A}{2}$ 为对称阵.

例

$$f(X)=X^T\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}X=X^T\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}X$$

- 一个二次型 $f(X)$ 一般对应多个矩阵, 但二次型和对称矩阵是一一对应的. 称对称矩阵 A 为二次型 $f(X)=X^TAX$ 的矩阵, 称二次型 f 为对称矩阵 A 的二次型.

- 只含平方项的二次型

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

称为标准形(或法式).

- 在标准式的基础上，若 $\lambda_i=1,-1,0$，则称

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_{p+q}^2$$

为规范形.

- 对应的矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}.$$

化简二次型:
寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

二次型的中心任务：将二次型化为标准形和规范形

化简二次型:

寻找可逆 (正交) 线性变换 $X = PY$, 使得

$$f(X) = f(PY) = Y^T P^T A P Y = k_1 y_1^2 + \cdots + k_n y_n^2$$

为标准形或规范形.

化简对称矩阵:

寻找可逆 (正交) 矩阵 P, 使得 $P^T A P$ 为对角矩阵.

二次型化简: 任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵 A, 存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

为对角阵.

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵 A，存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$$

为对角阵.

推论 (定理 6)

对于任意二次型 $f(X) = X^TAX$，一定存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\boldsymbol{\Lambda}Y = \boldsymbol{\lambda}_1 y_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n y_n^2.$$

二次型化简：任意二次型都可在某正交变换下化为标准形

定理 (定理 5: 对称矩阵可正交相似对角化)

对于任意对称矩阵 A，存在正交阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \boldsymbol{\Lambda} = diag(\boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n)$$

为对角阵.

推论 (定理 6)

对于任意二次型 $f(X) = X^TAX$，一定存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\boldsymbol{\Lambda}Y = \boldsymbol{\lambda}_1 y_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n y_n^2.$$

- 此时 $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n$ 为对称矩阵 A 的特征值.

推论

任意二次型 $f(X) = X^TAX$，一定存在可逆变换 $X = CZ$, 使得 $f(CZ)$ 为规范形.

证明: 存在正交变换 $X = PY$, 使得

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Y^T\Lambda Y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

不妨设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 不等于 0, $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$.

取 $X = PY = PKZ$, 其中 $K = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}, 1, \cdots, 1\right)$, 则

$$f = X^TAX = Y^TP^TAPY = Z^TK^T(P^TAP)KZ = Z^TK^T\Lambda KZ$$

为规范形. $\square$

二次型化简

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意二次型 } f=X^TAX \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交变换 } X=PY"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆变换 } X=CZ"'] & & \text{标准形 } f=Y^T\Lambda Y \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆变换 } Y=KZ"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

二次型化简

$$\begin{tikzcd}
\text{任意二次型 } f=X^TAX \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交变换 } X=PY"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆变换 } X=CZ"'] & & \text{标准形 } f=Y^T\Lambda Y \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆变换 } Y=KZ"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}$$

- 所有的变换都不唯一;
- 标准形不唯一, 但正交变换下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

例 (例 14)

设二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(1) 求正交变换 $X = PY$, 将二次型 f 化为标准形;

(2) 求可逆变换 $X = CZ$, 将二次型 f 化为规范形.

例 (例 14)

设二次型
$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(1) 求正交变换 $X = PY$, 将二次型 f 化为标准形;
(2) 求可逆变换 $X = CZ$, 将二次型 f 化为规范形.

解法: 将二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 正交相似对角化, 则 $X = PY$ 即为所求.

二次型化简：配方法（选学）

例

用配方法化简二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

例

用配方法化简二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

并求所用变换矩阵.

解法：有平方项则配平方，无平方项则凑平方项.

$$\begin{aligned}f&=(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3)+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2+4x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2+4(y_2+y_3)(y_2-y_3)\\&=(x_1-x_2+x_3)^2+4y_2^2-4y_3^2.\end{aligned}$$

- 二次型 $f(X) = X^T A X$, 取可逆变换 $X = PY$, 则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y$$

- 二次型 $f(X) = X^T A X$, 取可逆变换 $X = PY$, 则

$$f = X^T A X = Y^T P^T A P Y$$

定义

若存在可逆阵 P, 使得

$$P^T A P = B,$$

则称矩阵 A, B **合同**, 记为 $A \overset{\text{合同}}{\sim} \text{B}.$

给定对称矩阵 A，如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^TAP = \Lambda$$

为对角阵，则称对称阵 A 可以**合同对角化**.

合同对角化

给定对称矩阵 A，如果存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^T A P = \Lambda$$

为对角阵，则称对称阵 A 可以合同对角化.

- 此时，Λ 称为对称阵 A 的(合同) 标准形;
- 进一步，若 Λ 的对角线元素只能取 $1, -1, 0$, 则 Λ 称为对称阵 A 的(合同) 规范形.

对称矩阵合同对角化

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意对称矩阵 } A \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交阵 } P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆阵 } C"'] & & \text{标准形 } P^TAP=\Lambda \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆阵 } K"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意对称矩阵 } A \arrow[rr, Rightarrow, "\text{可逆/正交阵 } P"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{可逆阵 } C"'] & & \text{标准形 } P^TAP=\Lambda \arrow[dl, Rightarrow, "\text{可逆阵 } K"] \\
& \text{规范形} &
\end{tikzcd}
$$

- 所有的可逆阵/正交阵都不唯一;
- 标准形不唯一, 但正交阵下的标准形是唯一的;
- 规范形是唯一的.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数 称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数 称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7：惯性定理–正负惯性指数是合同不变量)

如果对称矩阵 A 和 B 合同，则他们的正负惯性指数相等.

合同不变量/性

- 合同不变量/性：合同的实对称矩阵 A, B 具有相同的阶次、秩、正（负）惯性指数、正（负）定性.
- 二次型的标准型 $f = \boldsymbol{\lambda}_1 x_1^2 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_n x_n^2$ 中正项的个数 称为二次型的正惯性指数，记为 p;
- 二次型标准型中负项的个数 称为二次型的负惯性指数，记为 q;
- 秩 $R(f) = R(A) = p + q$.

定理 (定理 7：惯性定理–正负惯性指数是合同不变量)

如果对称矩阵 A 和 B 合同，则他们的正负惯性指数相等.

注：实对称矩阵 A, B 合同 $\Leftrightarrow A, B$ 的正负惯性指数相同.

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T A X$ 或对称矩阵 A 为正定的,

定理 (定理 8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow \forall X\neq 0,\ f(X)>0;$

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow\ \forall X \neq 0,\ f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n;$

定理 (定理 8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ f(X)>0$;

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

定理 (定理 8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n;$

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

定理 (定理 8)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0$;

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A = C^TC$.

二次型和对称阵的正定性

定理 (定理 8)

$f(X) = X^T AX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) > 0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p = n;$ (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A = C^T C.$

定理 (定理 8)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为正定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ f(X)>0;$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数 $p=n;$ (正定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为正;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的顺序主子式全为正;

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 C, 使得对称阵 $A=C^TC.$

正定矩阵的性质:

- 若实对称阵 A 为正定的, 则 A^{-1}, A^T, A^* 也都为正定矩阵.
- 若实对称阵 A, B 为正定的, 则 $A+B$ 也是正定矩阵.

二次型和对称阵的负定性

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0,\ f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

定理 (定理 9)

$f(X)=X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的，

$\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ f(X)<0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q=n$;　　(负定性是合同不变性)

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正.

定理 (定理 9)

$f(X) = X^TAX$ 或对称矩阵 A 为负定的,

$\Leftrightarrow$ $\forall X \neq 0, f(X) < 0$;

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数 $q = n$;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的特征值全为负;

$\Leftrightarrow$ 对称阵 A 的奇数阶顺序主子式为负,偶数阶顺序主子式为正.

回顾:

- 主子式:行指标、列指标相同的子式.
- 顺序主子式:前 k 行、前 k 列构成的子式.
- 注意:第六版教材没有区分主子式和顺序主子式,描述有歧义。定理 9 以第七版为准!

合同不变量

性质

如果实对称矩阵 A 和 B 合同，则

- A 和 B 的正/负惯性指数都相同.
- A 正定当且仅当 B 正定，A 负定当且仅当 B 负定.
- A 和 B 等价. 从而，A 和 B 的阶次、秩、可逆性相同.

例题

例 (例 17)

判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

例 (例 17)

判断二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

思路:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- 方法一: 判断三个顺序主子式的正负.
  - 全正 $\Rightarrow$ 正定; 负正负 $\Rightarrow$ 负定; 其他情况 $\Rightarrow$ 不正定也不负定.
- 方法二: 判断三个特征值的正负.
  - 全正 $\Rightarrow$ 正定; 全负 $\Rightarrow$ 负定; 其他情况 $\Rightarrow$ 不正定也不负定.

例题

法一:

$D_1 = -5 < 0$; $D_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} > 0$; $D_3 = |A| < 0$. 所以负定.

法一:

$D_1 = -5 < 0$; $D_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} > 0$; $D_3 = |A| < 0$. 所以负定.

法二:

$$f(\boldsymbol{\lambda}) = |A - \boldsymbol{\lambda} E| = -\boldsymbol{\lambda}^3 - 15\boldsymbol{\lambda}^2 - 66\boldsymbol{\lambda} - 80$$

A 为对称阵, 所以 A 有三个实特征值, 即 $f(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 有三个根.
当 $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ 时, $f'(\boldsymbol{\lambda}) = -3\boldsymbol{\lambda}^2 - 30\boldsymbol{\lambda} - 66 < 0$, $f(\boldsymbol{\lambda})$ 为单调减函数,

$$f(\boldsymbol{\lambda}) \leq f(0) = -80 < 0,$$

所以 A 没有正特征值, 即 A 的三个特征值全负, A 为负定矩阵.

正定性和负定性的应用

正（负）定矩阵的应用:

- 若 $f = ax^2 + bxy + cy^2$ 正定，则二次曲线 $f = 1$ 为平面上的椭圆.
- 若 $f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$ 正定，则二次曲面 $f = 1$ 为三维空间中的椭球面.
- 二元函数极值点的刻画：

定理 (同济高等数学下 P113)

二元函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 附近光滑，$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

若 H 正定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极小值; 若 H 负定，则 $f(x_0, y_0)$ 为极大值.

小结

- 二次型和对称矩阵;
- 二次型化标准形: 正交变换法（和配方法）;
- 对称矩阵的合同和正定性.

作业

- 思考题：设 A, B 是 n 阶实对称矩阵，若 A 和 B 合同（i.e. 存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP = B$），则称 A 和 B 属于同一个合同类. 问 n 阶实对称矩阵的合同类最多有多少个?
（提示：正负惯性指数是对称阵合同的完全不变量，所以只需考虑正负惯性指数的所有可能取值，即满足 $0 \leq p + q \leq n$ 的正整数 p, q 的所有可能取值.）
- Page$_{141}$：29-1、32-1、34-1、35.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 11 月 5 日