线性代数-3

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 9 月 1 日

本次课内容

1. 行列式的展开

2. Vandermonde 行列式

3. 行列式与线性方程组

- 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}$$

回顾

- 行列式的五条性质
  1) $D^T = D$.
  2) 交换两行 (列)，则行列式变号.
  3) 某行 (列) 乘数 k，则行列式乘数 k.
  4) 一行 (列) 可加，则行列式可加.
  5) 某行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列) 上去，则行列式不变.
- 行列式的三种操作
  - $r_i \leftrightarrow r_j$.
  - $r_i \times k$.
  - $r_j + r_i \times k$.

行列式的展开定理

定理 (行列式的展开)

行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

注：$i = 1$ 时，即 n 阶行列式的递归定义.

- 在 n 阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式(**minor**)，记作 M_{ij}.

余子式和代数余子式

- 在 n 阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式(minor)，记作 M_{ij}.
- $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式**(algebraic minor).**

- 在 n 阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式(minor)，记作 M_{ij}.
- $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式(algebraic minor).
- 例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

的 a_{32} 的余子式和代数余子式

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

引理

一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

行列式的降阶

引理

一个 n 阶行列式，如果其中第 i 行所有元除 a_{ij} 外都为零，那么这行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D = a_{ij}A_{ij}.$$

例

计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

定理 (行列式的展开)

行列式等于它的任一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

例

证明

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

证明:

展开定理的一个推论

- $b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \cdots + b_n A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow r_j.$

展开定理的一个推论

- $b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \cdots + b_n A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow r_j.$

推论

$i \neq j$ 时，

$$a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \cdots + a_{in} A_{jn} = 0.$$

$$(a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \cdots + a_{ni} A_{nj} = 0)$$

例题 ($\star$)

例

设
$$D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$
求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 和 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解:

定理

证明 *Vandermonde* 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

证明:

设含有 n 个未知量 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D 称为线性方程组 (1) 的系数行列式.

令

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 (Carmer 法则)

若系数行列式 $D \neq 0$，则线性方程组 *(1)* 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

例

用 Carmer 法则求解线性方程组

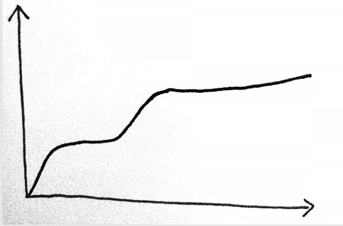
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

解:

补充：Vandermonde 行列式的一个背景

例 (以物换物)

现有两个原始部落，一个部落只有野兔，另一个部落只有野鸡。两个部落一直都有交换野兔和野鸡的传统。两部落兔鸡交换比例大致如下：



现要求建立一个一元三次函数的交易模型。

小结

- 行列式的展开定理

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

- Vandermonde 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).$$

- Carmer 法则.

作业

- 按时完成线上课程任务.
- Page21-23. 6-(4)(降阶法)、8-(2)(3)、9.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn