线性代数-7

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 9 月 19 日

回顾：矩阵的运算

- AB

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;
- A^*

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}
  - A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}
  - A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
  - $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

本次课内容

1. 矩阵分块和分块矩阵

2. 矩阵的初等变换

3. 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准矩阵

- 例：

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

- 例：

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；

分块矩阵的概念

- 例：

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad A_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；

- 例：

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；
- 以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵.

- 列分块矩阵和行分块矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

可分别记为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 和 $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$.

分块矩阵的运算规则和矩阵的运算规则类似

- 矩阵 A, B 同型，且分法相同，则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

- $$\lambda\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

- 矩阵 A, B 可乘，且对任意 i, j, 子块 A_{ik}, B_{kj} 可乘，则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

  其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}$.

- $$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

- 观点 1：A 行分块，B 列分块：

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n \\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n \end{pmatrix} = C$$

其中 $c_{ij} = \alpha_i^T\beta_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$.

例

实矩阵 $A = O$ 当且仅当方阵 $A^TA = O$.

例

实矩阵 $A=O$ 当且仅当方阵 $A^TA=O$.

- A^TA 为对称矩阵.

- 观点 2：A 不分块，B 列分块:

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

再探矩阵的乘法

- 观点 2：A 不分块，B 列分块：

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程 $AX = B$，将 X, B 写为列分块的形式，

$$\begin{aligned} AX = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} &= (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

- 观点 2：A 不分块，B 列分块:

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程 $AX = B$, 将 X, B 写为列分块的形式,

$$\begin{aligned} AX = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} &= (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 矩阵方程可以看成 n 个线性方程组 $AX_i = \beta_i$.

- 观点 3：A 列分块，B 行分块:

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_n\beta_n^T$$

- 观点 3：A 列分块，B 行分块:

$$AB = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T\end{pmatrix} = \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_n\beta_n^T$$

- 例：

$$\begin{pmatrix}1 & 4 \\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 \\ 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 \\ 3 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 0 \\ 5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 2 \\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

线性方程组 $AX=\beta$ 的向量表示方法

将 A 列分块，X 行分块，则

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \end{aligned}$$

上式称为线性方程组的向量表达.

- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个线性组合.

分块对角矩阵

- 分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 A 为 n 阶方阵，$A_1, \cdots, A_s$ 皆为方阵，其余位置为 0 矩阵.

- $$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

- A 可逆当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$, A^4 和 A^{-1}.

例

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$, A^4 和 A^{-1}.

Answer: $|A^5|=-40^5$,

$$A^4=\begin{pmatrix}10^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^4 & 0\\ 0 & 0 & -2^5 & 2^4\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0\\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

第三章. 矩阵的初等变换与线性方程组

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & ③ \end{cases} \tag{1}$$

(2)

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 & = -4 & ③ \end{cases} \tag{1}$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = -2 & ③ \end{cases} \tag{2}$$

(4)

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -4 & ③ \end{cases} \tag{1}$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow ②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 & ③ \end{cases} \tag{2}$$

$$\xrightarrow[③-2①]{②-2①} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ \quad -3x_2 + 3x_3 = -6 & ② \\ \quad -5x_2 + 5x_3 = -10 & ③ \end{cases} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

消元法化简线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -4 & ③ \end{cases} \tag{1}$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 & ③ \end{cases} \tag{2}$$

$$\xrightarrow[③-2①]{②-2①} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ -3x_2 + 3x_3 = -6 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 = -10 & ③ \end{cases} \tag{3}$$

$$\xrightarrow[③+5②]{②\div(-3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 = 2 & ② \\ 0 = 0 & ③ \end{cases} \tag{4}$$

- 取 x_3 为自由未知数，解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 2 + x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$, 则线性方程组的通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 \\ c+2 \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

- 取 x_3 为自由未知数，解得

$$\begin{cases} x_2 = 2 + x_3 \\ x_1 = 2 + x_3 \end{cases}$$

令 $x_3 = c$, 则线性方程组的通解为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+2 \\ c+2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数.

- 线性方程组的三种操作/变换不改变方程组的解.
  - 交换两个方程的位置: ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ
  - 方程等号两端同乘非零常数 k: ⓘ $\cdot k$
  - 方程加上另一个方程的 k 倍: ⓘ $+ k \cdot$ ⓙ

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}
\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_2\times(-\frac{1}{3})}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

矩阵的初等变换

将线性方程组的变换翻译为其增广矩阵的变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_2\times(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注：矩阵之间的变换用箭头表示；行列式的变换用等号.

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行；$(r_i \leftrightarrow r_j)$
- 某行乘以非零数 k；$(r_i \times k)$
- 某行加上另外一行的 k 倍. $(r_i + kr_j)$

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行；$(r_i \leftrightarrow r_j)$
- 某行乘以非零数 k; $(r_i \times k)$
- 某行加上另外一行的 k 倍. $(r_i + kr_j)$

- 类似，可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

例 (矩阵的三种初等行变换)

- 交换两行; $(r_i \leftrightarrow r_j)$
- 某行乘以非零数 k; $(r_i \times k)$
- 某行加上另外一行的 k 倍. $(r_i + kr_j)$

- 类似, 可以定义矩阵的初等列变换. 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.
- 三种初等变换都是可逆的, 且逆变换是相同类型的变换.
  - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
  - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
  - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中，什么矩阵简单?
- 等价的矩阵有什么共性?
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题：

- 在相互等价的矩阵中，什么矩阵简单？

  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性？
- 对矩阵进行初等变换有什么用处？

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题：

- 在相互等价的矩阵中，什么矩阵简单？

  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性？

  $\Rightarrow$ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处？

矩阵的等价

- 若矩阵 A 可以经过有限初等行变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等列变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若矩阵 A 可以经过有限初等变换变为矩阵 B, 则称矩阵 A 和矩阵 B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题:

- 在相互等价的矩阵中，什么矩阵简单?

  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性?

  $\Rightarrow$ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

  $\Rightarrow$ 判断/求解线性方程组的解.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_2\times(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- 通过六步初等变换，矩阵下方的 0 不断变多.
- 矩阵 (7) 和 (8) 下方的零构成一个阶梯形状.

行阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0;
  - 每个台阶只有一行;
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 反例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

行最简形矩阵、标准形矩阵

- 行最简形矩阵:
  - 行阶梯形;
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

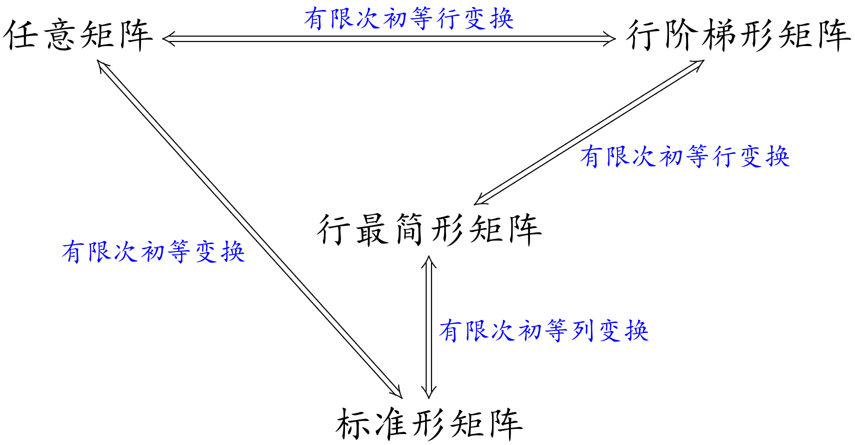
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

- 行阶梯形矩阵 $\supset$ 行最简形矩阵 $\supset$ 标准形矩阵.

命题


任意矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

$$
\begin{tikzcd}
\text{任意矩阵} \arrow[rr, Leftrightarrow, "\text{有限次初等行变换}"] \arrow[ddr, Leftrightarrow, "\text{有限次初等变换}"'] & & \text{行阶梯形矩阵} \arrow[dl, Leftrightarrow, "\text{有限次初等行变换}"] \\
& \text{行最简形矩阵} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{有限次初等列变换}"] & \\
& \text{标准形矩阵} &
\end{tikzcd}
$$

- 矩阵的行阶梯形不唯一，但行最简形和标准形唯一.

例题

例

利用初等行变换将 A 依次化为行阶梯形、行最简形; 再利用初等列变换化为标准形

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

小结

1、 矩阵分块和分块矩阵

2、 矩阵的初等变换和等价

3、 矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形

作业

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

- 求 $|A^2|$, A^3 和 A^{-1}.
- 首先利用初等行变换将 A 依次化为行阶梯形、行最简形; 然后利用初等列变换化为标准形.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2024 年 9 月 19 日