Lec-14. 方差

主讲教师： 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页： wulisu.cn

本次课内容

1. 方差的定义
2. 方差的计算
3. 方差的性质
4. 切比雪夫不等式

引理

例

有两批灯泡，寿命分布如下：

X	$X < 950$	$950 \le X \le 1050$	$X > 1050$
n	0.005	0.99	0.005

Y	$Y = 700$	$700 < Y < 1300$	$Y = 1300$
n	0.5	0	0.5

假设平均寿命都是 $E(X) = E(Y) = 1000h$,
如何判定这两批灯泡的质量好坏.

- 随机变量 X 的均值：$E(X)$
- X 对于均值的离差：$X - E(X)$
- X 对于均值的平均离差：$E(X - E(X)) = 0$

- 随机变量 X 的均值：$E(X)$
- X 对于均值的离差：$X - E(X)$
- X 对于均值的平均离差：$E(X - E(X)) = 0$
- 反映随机变量波动性可以用：

$$E[X - E(X)]^2$$

$\Rightarrow$ 方差.

方差

定义

设 X 是一个随机变量, 若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在, 则称它为 X 的方差, 记为 $D(X)$, 即

$$D(X) = E\{[X-E(X)]^2\}$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$, 称为标准差.

方差

定义

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称它为 X 的方差，记为 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$，称为标准差.

$D(X)$ 或 $\sigma(X)$ 体现 X 取值的波动性，是衡量 X 取值分散程度的数字特征. 若 $D(X)$ 较小，则 X 取值比较集中；反之，若 $D(X)$ 越大，则说明 X 取值较分散.

方差的计算方法 1

- 令 $g(X) = [X - E(X)]^2$, 则

$$D(X) = E(g(X)).$$

  方差是 X 的函数 $g(X)$ 的数学期望.

方差的计算方法 1

- 离散型: $P\{X = x_k\} = p_k$,

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E(X))^2 p_k.$$

- 连续型:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx.$$

方差的计算方法 2

性质 ($\star$ 更常用 $\star$)

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$

方差的计算方法 2

性质 ($\star$ 更常用 $\star$)

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$

证明:

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\
&= E\{X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\} \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}
$$

□

方差的计算方法 2

分别计算 $E(X)$ 和 $E(X^2)$

- 离散型: $P\{X = x_k\} = p_k$,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \qquad E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k.$$

- 连续型: $f(x)$,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx, \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx.$$

常见离散型随机变量的方差

- 两点分布 $X \sim 0\text{-}1(p)$

$$E(X) = p, D(X) = p(1-p).$$

- 二项分布 $X \sim b(n, p)$

$$E(X) = np, D(X) = np(1-p).$$

- 泊松分布 $X \sim \pi(\lambda)$

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda.$$

- 几何分布 $X \sim Geom(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{p-1}{p^2}.$$

常见连续型随机变量的方差

- 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- 指数分布 $X \sim E(\boldsymbol{\theta})$

$$E(X) = \boldsymbol{\theta}, D(X) = \boldsymbol{\theta}^2.$$

- 正态分布 $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$

$$E(X) = \boldsymbol{\mu}, D(X) = \boldsymbol{\sigma}^2.$$

例

- 泊松分布 $X \sim \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\lambda})$, 计算 $D(X)$.
- 指数分布 $X \sim E(\boldsymbol{\theta})$, 计算 $D(X)$.

方差的性质

性质

1. 设 C 是常数, 则有 $D(C) = 0$.
2. 设 X 是随机变量, a 是常数, 则

$$D(aX) = a^2D(X), D(X + a) = D(X)$$

特别地, $D(X) = D(-X)$.

方差的性质

性质

3. 设 X, Y 是两个随机变量，则有

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X,Y),$$

其中 $cov(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$. 特别地，若 X 与 Y 独立，则

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

证明:

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\} \\
&= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
\end{aligned}
$$

□

证明:

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) &= E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\} \\
&= D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
\end{aligned}
$$

$\square$

- 由性质 1-3，若X, Y 相互独立，则

$$D(aX+bY+C)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

- 进一步，若$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$D(c_0+\sum_i^n c_iX_i)=\sum_i^n c_i^2D(X_i).$$

例

二项分布 $X \sim b(n,p)$, 计算 $D(X)$.

例

设 $E(X)=\boldsymbol{\mu}$, $D(X)=\boldsymbol{\sigma}^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}},$$

则 $E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$. X^* 为 X 的标准化变量.

例

设 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2\neq 0$. 记

$$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma},$$

则 $E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$. X^* 为 X 的标准化变量.

证明: $E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=0$,

$$\begin{aligned} D(X^*) &= E(X^{*2})-[E(X^*)]^2 \\ &= E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=\frac{1}{\sigma^2}E((X-\mu)^2)=1. \end{aligned}$$

□

例

- $X \sim N(0,1)$, 计算 $D(X)$.
- $X \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$, 计算 $D(X)$.

- $X_i \sim N(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则相互独立, 则

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{\mu}_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \boldsymbol{\sigma}_i^2\right)$$

例

设活塞的直径 (以 cm 计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径为 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$. X, Y 相互独立, 任取一只活塞, 求活塞能装入气缸的概率.

例

设活塞的直径 (以 cm 计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径为 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$. X, Y 相互独立, 任取一只活塞, 求活塞能装入气缸的概率.

解:$X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$

$$
\begin{aligned}
P\{X < Y\} &= P\{X - Y < 0\} \\
&= P\{\frac{X - Y - (-0.1)}{0.05} < \frac{0 - (-0.1)}{0.05}\} \\
&= \Phi(2) = 0.9772.
\end{aligned}
$$

□

切比雪夫不等式 (Chebyshev)

定理

设 X 具有 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 则对任意正数 ε, 有

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

切比雪夫不等式 (Chebyshev)

定理

设 X 具有 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, 则对任意正数 ε, 有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

意义：分布未知, $E(X)$ 和 $D(X)$ 存在的条件下, 估计

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式 (Chebyshev)

证:

$$
\begin{aligned}
P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\,dx \\
&\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}
$$

□

方差的性质

推论

- $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1.$

方差的性质

推论

- $D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1.$

证明: (充分性) $P\{X = E(X)\} = 1$, 则有 $P\{X^2 = (E(X))^2\} = 1$, 则

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.$$

(必要性) 反证法. 假设 $P\{X=E(X)\}<1$, 则存在 $\boldsymbol{\varepsilon}>0$, 有

$$P\{|X-E(X)|\geq\boldsymbol{\varepsilon}\}>0.$$

但由切比雪夫不等式, 对 $\forall\boldsymbol{\varepsilon}>0$, 有

$$P\{|X-E(X)|\geq\boldsymbol{\varepsilon}\}=0.$$

矛盾. 故 $P\{X=E(X)\}=1$. $\square$

练习

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求 $D(X), D(Y), D(X+Y), D(X^2)$.

练习

设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求 $D(X), D(Y), D(X+Y), D(X^2)$.

求 $D(2X-1), D(2X^2-1)$.

例

设 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0;\\ 1-x & 0\le x<1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

例

设 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0;\\ 1-x & 0\le x<1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解: $E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x)\,dx=0$

$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x^3(1-x)\,dx=\frac{1}{6}$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}.$ □

例

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & 0\le x\le \frac{\pi}{2};\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的方差 $D(Y)$.

例

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Y = X^2$ 的方差 $D(Y)$.

解: $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24$

$D(X^2) = E(X^4) - (E(X^2))^2 = 20 - 2\pi^2.$ □

例

设

X	-2	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

求 $D(2X^3+5)$.

例

设

X	-2	0	1	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

求 $D(2X^3+5)$.

解: $E(X^6)=\frac{493}{6}$, $E(X^3)^2=\frac{1}{9}$

$D(2X^3+5)=4D(X^3)=4(E(X^6)-(E(X^3))^2))=\frac{2954}{9}$. $\square$

小结

- $D(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$.
- $D(aX) = a^2 D(X)$
- $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$,
  其中 $cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$.
  特别地, 若 X 与 Y 独立, 则
  $$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$
- 切比雪夫不等式:
  $$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

常见离散型随机变量的期望与方差

	分布律	$E(X)$	D(X)
$X \sim$ 0-1(p)	$P_k = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
$X \sim b(n, p)$	$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \cdots, n$	np	$np(1-p)$
$X \sim \pi(\lambda)$	$P_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, \cdots, n$	λ	λ
$X \sim Geom(p)$	$P_k = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{p-1}{p^2}$

常见连续型随机变量的期望与方差

	概率密度	$E(X)$	D(X)
$X \sim U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim Exp(\theta)$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$	θ	θ^2
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<\infty.$	μ	σ^2