

## Lec-15. 协方差与相关系数、矩

主讲教师：吴利苏 ([wulisu@sdust.edu.cn](mailto:wulisu@sdust.edu.cn))

主 页：[wulisu.cn](http://wulisu.cn)

# 本次课内容

1. 协方差及相关系数

2. 矩、协方差矩阵

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)$$

其中  $Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ .

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)$$

其中  $Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ .

- 若  $X, Y$  相互独立, 则

$$Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = 0.$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y)$$

其中  $Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ .

- 若  $X, Y$  相互独立, 则

$$Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = 0.$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

- $Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$  定义为协方差.

## 协方差和相关系数

### 定义

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

称为随机变量  $X$  与  $Y$  的**协方差**(covariance).

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

称为  $X$  与  $Y$  的**相关系数**(correlation coefficient).

## 本节公式

- 协方差的计算公式:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

- 相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

- $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$

例

设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求  $\rho_{XY}$ .

解:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^y xe^{-y} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(3)}{2} = \frac{2!}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^y x^2 e^{-y} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^3}{3} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(4)}{3} = \frac{3!}{3} = 2 \end{aligned}$$

所以  $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1$ .

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^y ye^{-y} dx = \int_0^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \Gamma(3) = 2! = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^y y^2 e^{-y} dx = \int_0^{\infty} y^3 e^{-y} dy = \Gamma(4) = 3! = 6 \end{aligned}$$

所以  $D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2$ .

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^y xye^{-y} dx = \int_0^{\infty} \frac{y^3}{2} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(4)}{2} = \frac{3!}{2} = 3 \end{aligned}$$

所以  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1$ ,

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square$$

## 协方差的性质

### 性质 (对称性)

1.  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X).$
2.  $Cov(X, X) = D(X).$

## 协方差的性质

### 性质 (对称性)

1.  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ .
2.  $Cov(X, X) = D(X)$ .

### 性质 (双线性)

3.  $Cov(aX, bY) = ab \cdot Cov(X, Y)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .
4.  $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ .

## 协方差的性质

### 性质 (对称性)

1.  $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ .
2.  $Cov(X, X) = D(X)$ .

### 性质 (双线性)

3.  $Cov(aX, bY) = ab \cdot Cov(X, Y), a, b \in \mathbb{R}$ .
4.  $Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$ .
5.  $Cov(X + C, Y) = Cov(X, Y)$ .

例

计算  $Cov(3X + 2Y, 2X)$ .

## 性质

下列说法等价 (TFAE) :

1.  $X, Y$  不相关.
2.  $\rho_{XY} = 0$ .
3.  $Cov(X, Y) = 0$ .
4.  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

## 性质

下列说法等价 (TFAE) :

1.  $X, Y$  不相关.
2.  $\rho_{XY} = 0$ .
3.  $Cov(X, Y) = 0$ .
4.  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

## 推论

若  $X$  和  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.
- 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.
- 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .
  - 相互独立  $\Rightarrow$  不相关;

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.
- 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .
  - 相互独立  $\Rightarrow$  不相关;
  - 相互独立  $\not\Leftarrow$  不相关;

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.
- 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .
  - 相互独立  $\Rightarrow$  不相关;
  - 相互独立  $\not\Leftarrow$  不相关;

注: 这里  $X, Y$  不相关是指  $X$  和  $Y$  没有线性关系, 而不是指完全没有关系.  $X, Y$  相互独立是指  $X$  和  $Y$  完全没有关系 (包括线性关系).

## 协方差的意义

$Cov(X, Y)$  反应了  $X$  与  $Y$  的线性相关性.

- 当  $Cov(X, Y) > 0$  时,  $X$  与  $Y$  正相关.
- 当  $Cov(X, Y) < 0$  时,  $X$  与  $Y$  负相关.
- 当  $Cov(X, Y) = 0$  时,  $X$  与  $Y$  (线性) 不相关.
- 若  $X$  与  $Y$  相互独立, 则  $Cov(X, Y) = 0$ .
  - 相互独立  $\Rightarrow$  不相关;
  - 相互独立  $\nLeftarrow$  不相关;

注: 这里  $X, Y$  不相关是指  $X$  和  $Y$  没有线性关系, 而不是指完全没有关系.  $X, Y$  相互独立是指  $X$  和  $Y$  完全没有关系 (包括线性关系).

## 例 (反例)

$(X, Y)$  的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P\{Y = j\}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

则  $X$  与  $Y$  不相关, 且不相互独立.

## 例 (反例)

$(X, Y)$  的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P\{Y = j\}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

则  $X$  与  $Y$  不相关, 且不相互独立.

实际上,  $X$  与  $Y$  非线性相关, 但  $Y = X^2$ .

## 相关系数的意义

- 相关系数刻画了两个随机变量的线性近似程度, 即  $a + bX$  与  $Y$  的最大近似程度.

## 相关系数的意义

- 相关系数刻画了两个随机变量的线性近似程度, 即  $a + bX$  与  $Y$  的最大近似程度.
  - $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .

## 相关系数的意义

- 相关系数刻画了两个随机变量的线性近似程度, 即  $a + bX$  与  $Y$  的最大近似程度.
  - $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .
  - 当  $\rho_{XY} > 0$  时,  $X$  和  $Y$  是正相关的.  
特别地, 若  $\rho_{XY} = 1$ , 则存在  $b > 0$ , 使得  $Y = a + bX$  几乎完全成立.

## 相关系数的意义

- 相关系数刻画了两个随机变量的线性近似程度, 即  $a + bX$  与  $Y$  的最大近似程度.
  - $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .
  - 当  $\rho_{XY} > 0$  时,  $X$  和  $Y$  是正相关的.  
特别地, 若  $\rho_{XY} = 1$ , 则存在  $b > 0$ , 使得  $Y = a + bX$  几乎完全成立.
  - 当  $\rho_{XY} < 0$  时,  $X$  和  $Y$  是负相关的.  
特别地, 若  $\rho_{XY} = -1$ , 则存在  $b < 0$ , 使得  $Y = a + bX$  几乎完全成立.

## 相关系数的意义

- 相关系数刻画了两个随机变量的线性近似程度, 即  $a + bX$  与  $Y$  的最大近似程度.
  - $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .
  - 当  $\rho_{XY} > 0$  时,  $X$  和  $Y$  是正相关的.  
特别地, 若  $\rho_{XY} = 1$ , 则存在  $b > 0$ , 使得  $Y = a + bX$  几乎完全成立.
  - 当  $\rho_{XY} < 0$  时,  $X$  和  $Y$  是负相关的.  
特别地, 若  $\rho_{XY} = -1$ , 则存在  $b < 0$ , 使得  $Y = a + bX$  几乎完全成立.
  - 当  $\rho_{XY} = 0$  时,  $X$  和  $Y$  是不相关, 即它们不存在线性关系.

## 相关系数的意义

- 定义均方误差

$$e = E\{[Y - (a + bX)]^2\}$$

$e$  越小,  $a + bX$  与  $Y$  近似程度越好. 确定  $a$  与  $b$  的值, 使得  $e$  达到最小.

## 相关系数的意义

- 定义均方误差

$$e = E\{[Y - (a + bX)]^2\}$$

$e$  越小,  $a + bX$  与  $Y$  近似程度越好. 确定  $a$  与  $b$  的值, 使得  $e$  达到最小.

- 求  $e = e(a, b)$  的最小值.

$$\begin{aligned} e &= E[(Y - (a + bX))^2] \\ &= E(Y^2) + b^2 E(X^2) + a^2 \\ &\quad - 2bE(XY) + 2abE(X) - 2aE(Y). \end{aligned}$$

## 相关系数的意义

- 对  $e$  分别关于  $a, b$  求偏导数, 并令它们等于零.

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 2a + 2bE(X) - 2E(Y) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2) - 2E(XY) + 2aE(X) = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} b_0 = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)}, \\ a_0 = E(Y) - b_0E(X) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{D(X)} \end{cases}$$

则

$$e_{\min} = e(a_0, b_0) = E([Y - (a_0 + b_0X)]^2) = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y).$$

$\rho_{XY}$  是表示  $X, Y$  之间线性相关程度的数字特征.

- 当  $|\rho_{XY}|$  较大时,  $e$  较小, 表明  $X, Y$  的线性关系较紧密.
- 当  $|\rho_{XY}|$  较小时,  $e$  较大, 表明  $X, Y$  的线性关系较差.
- 当  $\rho_{XY} = 0$  时,  $X, Y$  不相关.

## 相关系数的性质

### 定理

(1.)  $|\rho_{XY}| \leq 1;$

(2.)  $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \text{ s.t.}$

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

## 相关系数的性质

### 定理

(1.)  $|\rho_{XY}| \leq 1;$

(2.)  $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b \text{ s.t.}$

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

证明: (1)  $E[Y - (a_0 + b_0X)]^2 = (1 - \rho_{XY}^2)D(Y),$   
 $E[Y - (a_0 + b_0X)]^2 \geq 0, D(Y) \geq 0,$  所以

$$1 - \rho_{XY}^2 \geq 0 \Rightarrow |\rho_{XY}| \leq 1.$$

(2) "⇒" 若  $|\rho_{XY}| = 1$ , 则

$$\begin{aligned} D(Y - (a_0 + b_0X)) &= E\{[Y - (a_0 + b_0X)]^2\} \\ &\quad - \{E(Y - (a_0 + b_0X))\}^2 \\ &= 0 - \{E(Y - (a_0 + b_0X))\}^2 \end{aligned}$$

因此

$$D(Y - (a_0 + b_0X)) = 0$$

$$E(Y - (a_0 + b_0X)) = 0.$$

由方差的性质 4, 知

$$P\{Y = a_0 + b_0X\} = 1.$$

" $\Leftarrow$ " 若  $\exists a^*, b^*, \text{s.t. } P\{Y = a^* + b^*X\} = 1$ , 即

$$P\{Y - (a^* + b^*X) = 0\} = 1.$$

则  $E\{[Y - (a^* + b^*X)]^2\} = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 = E\{[Y - (a^* + b^*X)]^2\} &\geq \min E\{[Y - (a + bX)]^2\} \\ &= E\{Y - (a_0 + b_0X)\}^2 \\ &= (1 - \rho_{XY}^2)D(Y) \end{aligned}$$

故  $|\rho_{XY}| = 1$ . □

## 性质

取标准化变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}.$$

则  $\rho_{XY} = \text{Cov}(X^*, Y^*)$ .

## 性质

取标准化变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}.$$

则  $\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*)$ .

证:

$$\begin{aligned} Cov(X^*, Y^*) &= Cov\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) \\ &= \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \\ &= \rho_{XY}. \end{aligned}$$

例

设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 求  $X$  与  $Y$  的相关系数.

## 例

设  $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 求  $X$  与  $Y$  的相关系数.

解:  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

则  $E(X) = \mu_1$ ,  $E(Y) = \mu_2$ ,  $D(X) = \sigma_1^2$ ,  $D(Y) = \sigma_2^2$ .

令  $X^* = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1}$ ,  $Y^* = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$ ,

则  $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ ,  $D(X^*) = D(Y^*) = 1$ .

$\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E(X^* Y^*)$ .

$$\begin{aligned}
E(X^* Y^*) &= E\left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}\right) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \cdot f(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \\
&\quad \times \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right) dx dy
\end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}, |J| = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \sigma_1\sigma_2,$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbb{R}^2} uv \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right) dudv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\mathbb{R}^2} uv \times \exp\left(-\frac{(u - \rho v)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{v^2}{2}\right) dudv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{令 } t &= \frac{u-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}, w = v, |J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(w,t)} \right| = \sqrt{1-\rho^2}, \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{1-\rho^2}t + \rho w) w \times \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) dt dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \sqrt{1-\rho^2} t e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \rho w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dt dw \\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw + \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
&= 0 + \frac{\rho}{2\pi} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} = \rho
\end{aligned}$$

所以  $\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E(X^* Y^*) = \rho$ . □

$$\begin{aligned}
\text{令 } t &= \frac{u-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}, w = v, |J| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(w,t)} \right| = \sqrt{1-\rho^2}, \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} (\sqrt{1-\rho^2}t + \rho w) w \times \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) dt dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \sqrt{1-\rho^2} t e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-\frac{w^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \rho w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dt dw \\
&= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw + \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw \\
&= 0 + \frac{\rho}{2\pi} \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi} = \rho
\end{aligned}$$

所以  $\rho_{XY} = Cov(X^*, Y^*) = E(X^* Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E(X^* Y^*) = \rho$ . □

- 二维正态分布参数  $\rho$  就是相关系数.
- 二维正态分布中,

$X$ 与 $Y$ 相互独立  $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow X$ 与 $Y$ 不相关.

## 例

设  $X \sim N(1, 3^2)$ ,  $Y \sim N(0, 4^2)$ ,  $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$ . 令  
 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$ .

- (1) 求  $Z$  的数学期望和方差.
- (2) 求  $X$  与  $Z$  的相关系数.
- (3) 问  $X$  与  $Z$  是否相互独立, 为什么?

解: (1)  $E(X) = 1, E(Y) = 0,$

$$D(X) = 9, D(Y) = 16.$$

$$E(Z) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}.$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\text{Cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right) = 3.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{Cov}(X, Z) &= \text{Cov}\left(X, \left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{Cov}(X, Y) = 0. \end{aligned}$$

$$\rho_{XZ} = 0.$$

(3)  $X, Z$  为正态分布,  $\rho_{XZ} = 0 \Rightarrow X$  与  $Z$  相互独立. □

## 矩

- $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$
- 本质上都是计算期望!

## 矩

- $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$
- 本质上都是计算期望!

## 矩

设  $X, Y$  为随机变量,

- 若

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 则称它为  $X$  的  $k$  阶原点矩, 简称  $k$  阶矩.

设  $X, Y$  为随机变量,

- 若

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 则称它为  $X$  的  $k$  阶原点矩, 简称  $k$  阶矩.

- 若

$$E\{[X - E(X)]^k\}$$

存在, 称它为  $X$  的  $k$  阶中心距.

设  $X, Y$  为随机变量,

- 若

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 则称它为  $X$  的  $k$  阶原点矩, 简称  $k$  阶矩.

- 若

$$E\{[X - E(X)]^k\}$$

存在, 称它为  $X$  的  $k$  阶中心矩.

- 若

$$E(X^k Y^l)$$

存在, 称它为  $X$  和  $Y$  的  $k+l$  阶混合矩.

设  $X, Y$  为随机变量,

- 若

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 则称它为  $X$  的  $k$  阶原点矩, 简称  $k$  阶矩.

- 若

$$E\{[X - E(X)]^k\}$$

存在, 称它为  $X$  的  $k$  阶中心矩.

- 若

$$E(X^k Y^l)$$

存在, 称它为  $X$  和  $Y$  的  $k + l$  阶混合矩.

- 若

$$E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}$$

存在, 则称它为  $X$  和  $Y$  的  $k + l$  阶混合中心矩.

## 矩

1.  $E(X)$  是  $X$  的一阶原点矩,  
 $D(X)$  为二阶中心距,  
 $Cov(X, Y)$  是  $X$  和  $Y$  的二阶混合中心距.

## 矩

1.  $E(X)$  是  $X$  的一阶原点矩,  
 $D(X)$  为二阶中心距,  
 $Cov(X, Y)$  是  $X$  和  $Y$  的二阶混合中心距.
2. 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望.

## 矩

1.  $E(X)$  是  $X$  的一阶原点矩,  
 $D(X)$  为二阶中心距,  
 $Cov(X, Y)$  是  $X$  和  $Y$  的二阶混合中心距.
2. 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望.
3. 在实际应用中, 高于 4 阶的矩很少用.  
三阶中心矩  $E\{[X - E(X)]^3\}$  主要用来衡量随机变量的分布是否有偏.  
四阶中心矩  $E\{[X - E(X)]^4\}$  主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度.

## 协方差矩阵

二维随机变量  $(X_1, X_2)$  的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} D(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & D(X_2) \end{pmatrix}.$$

## 协方差矩阵

$n$  维随机变量  $(X_1, \dots, X_n)$  的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} D(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & D(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & D(X_n) \end{pmatrix}.$$

- 协方差矩阵  $C = C^T$  为对称非负定矩阵.
- 作用：刻画高维随机变量.  
比如定义  $n$  维正态分布.

## 二维正态分布

二维正态分布  $(X, Y)$  的概率密度:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} (x-\mu_1, y-\mu_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x-\mu_1, y-\mu_2) \frac{\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x-\mu_1, y-\mu_2) C^{-1} \begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

其中  $C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  为协方差矩阵,  $\det C = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ .

## $n$ 维正态分布

$n$  维正态分布  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  的概率密度:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T C^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \right]$$

其中  $\boldsymbol{\mu} = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$ ,  $C$  为协方差矩阵.

## $n$ 维正态分布的性质

1.  $n$  维正态随机变量  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ,  $n \geq 1$ , 其任意子向量  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})^T$  ( $1 \leq k \leq n$ ) 均服从  $k$  维正态分布.

例如:  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  为 3 维正态随机变量, 则  $(X_1, X_2)^T, (X_1, X_3)^T, (X_2, X_3)^T$  均为二维正态随机变量.

特别地, 每一个分量  $X_i$  都是一维正态变量.

反之, 若  $X_i$  均为一维正态变量, 且相互独立, 则  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  为  $n$  维正态随机变量.

## $n$ 维正态分布的性质

2.  $n$  维随机变量  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,  $n \geq 1$ , 服从  $n$  维正态分布  $\Leftrightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$  的任意线性组合

$$l_0 + l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$$

均服从一维正态分布, 其中  $l_1, l_2, \dots, l_n$  不全为 0.

例如:  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  为 3 维正态随机变量, 则

$3X_1 - X_2, 2X_1 + 4X_3 + 1, X_2 - 3X_1 - X_3 - 2$  均为一维正态随机变量.

3.  $n$  维正态随机变量  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T, n \geq 1,$

若  $Y_1, \dots, Y_k$  均为  $X_i$  的线性函数, 则

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)^T$  也服从  $k$  维正态分布.

这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

例如:  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  为 3 维正态随机变量, 则

$(3X_1 - X_2, 2X_1 + 4X_3 + 1, X_2 - 3X_1 - X_3 - 2, X_2)^T$  服从 4 维正态分布.

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. 设  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ,  $n \geq 1$  服从  $n$  维正态分布,  
TFAE:

1.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立;
2.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  两两不相关;
3.  $\mathbf{X}$  的协方差矩阵为对角矩阵.

## 例

设  $(X, Y) \sim N(0, 1, 1, 4, -\frac{1}{2})$ , 求:

(1)  $D(2X - Y)$ ,

(2)  $P\{2X > Y\}$ ,

(3)  $(Z_1, Z_2)$  的分布,  $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$ .