Lec-16. 大数定律、中心极限定理

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：wulisu.cn

本次课内容

1. 大数定律

2. 中心极限定理

依概率收敛

定义

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是一个随机变量序列, a 是一个常数. 若对于任意正数 ε, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 依概率收敛于 a, 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a.$$

依概率收敛

性质

设 $X_n \xrightarrow{P} a$, $Y_n \xrightarrow{P} b$, 函数 $g(x, y)$ 在点 (a, b) 连续，则

$$g\left(X_n, Y_n\right) \xrightarrow{P} g(a, b).$$

切比雪夫大数定律

记

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

定理 (切比雪夫大数定律)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立, 则

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k).$$

弱大数定律/辛钦大数定律

定理 (弱大数定律/辛钦大数定律)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布且 $E(X_k) = \boldsymbol{\mu}\ (k = 1, 2, \cdots)$，则

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\mu}$$

伯努利大数定律

定理 (伯努利大数定律)

$$\text{频率} \xrightarrow{P} \text{概率}$$

伯努利大数定律

定理 (伯努利大数定律)

$$\text{频率} \xrightarrow{P} \text{概率}$$

证明: 切比雪夫不等式 $\Longrightarrow$ 切比雪夫大数定律 $\Longrightarrow$ 弱大数定律 $\Longrightarrow$ 伯努利大数定律.

独立同分布的中心极限定理

定理 (独立同分布的中心极限定理)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，则当 n 充分大时，

$$Y_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}\boldsymbol{\sigma}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

其中 $\boldsymbol{\mu} = E(X_k)$, $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D(X_k)}$.

独立 (不一定同分布) 的中心极限定理

定理 (李雅普诺夫定理)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立，则当 n 充分大时，

$$Y_n^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\sigma}_k^2}} \xrightarrow{\text{近似}} N(0,1).$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_k = E(X_k)$, $\boldsymbol{\sigma}_k^2 = D(X_k)$.

二项分布的中心极限定理

定理 (棣莫弗—拉普拉斯定理)

设随机变量 $\eta_n \sim b(n,p)$, 则当 n 充分大时,

$$\eta_n^* = \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

例

一加法器同时收到 20 个噪声电压 V_k $(k=1,\ldots,20)$，设它们是独立同分布的，且 $V_k \sim U(0,10)$.

记 $V=\sum\limits_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P\{V>105\}$ 的近似值.

例

一艘船舶在某海区航行，已知每遭受一次波浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为 $p = 1/3$，若船舶遭受了 90000 次波浪冲击，问其中有 $29500 \sim 30500$ 次纵摇角度大于 3° 的概率是多少？

例

对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量，设一个学生无家长、有 1 名家长、有 2 名家长来参加会议的概率分别为 0.05、0.8、0.15. 若学校共有 400 名学生，设各学生参加会议的家长人数相互独立，且服从同一分布.

(1) 求参加会议的家长人数 X 超过 450 的概率.

(2) 求有 1 名家长来参加会议的学生人数不多于 340 的概率.