Lec-22. 区间估计

主讲教师: 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页: wulisu.cn

本次课内容

1. 区间估计

2. 枢轴量（补充）

3. 单侧置信区间

4. 单个正态总体参数的区间估计

- σ^2 已知, μ 的置信区间
- σ^2 未知, μ 的置信区间
- 其他总体 μ 的置信区间
- μ 未知, σ^2 的置信区间

区间估计

- 根据具体样本观测值, 点估计对未知参数提供一个明确的数值.
- 但这种判断的把握有多大, 点估计本身并没有告诉人们. 为弥补这种不足, 提出区间估计的概念.

区间估计

设 X 是总体, $X_1, ..., X_n$ 是一样本. 区间估计的目的是找到两个统计量:

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n), \quad \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n),$$

使随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 以一定概率盖住 θ.

定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$, θ 未知. 对给定概率值 $\alpha(0<\alpha<1)$, 有两个统计量

$$\underline{\theta}=\underline{\theta}\big(X_1,\cdots,X_n\big),\quad \overline{\theta}=\overline{\theta}\big(X_1,\cdots,X_n\big),$$

使得

$$P\Big\{\underline{\theta}\big(X_1,\cdots,X_n\big)<\theta<\overline{\theta}\big(X_1,\cdots,X_n\big)\Big\}\geq 1-\alpha$$

则

- $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的(双侧) 置信区间;
- $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信下限和置信上限.

注

- 参数 θ 虽然未知, 但是一个确定的值.

注

- 参数 θ 虽然未知, 但是一个确定的值.
- $\underline{\theta}, \overline{\theta}$ 是统计量, 随机的, 依赖于样本.

注

- 参数 θ 虽然未知, 但是一个确定的值.
- $\underline{\theta}, \overline{\theta}$ 是统计量, 随机的, 依赖于样本.
- 置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 不唯一, 依赖于样本.

注

- 参数 θ 虽然未知，但是一个确定的值.
- $\underline{\theta}, \overline{\theta}$ 是统计量，随机的，依赖于样本.
- 置信区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 不唯一，依赖于样本.
- 对于有些样本观察值，区间可能覆盖 θ，但对于另一些样本观察值，区间也可能不覆盖 θ.

置信区间的含义

设总体 $X \sim N(\mu, 4), \mu$ 未知, $X_1, \ldots, X_4$ 是一样本. 则 $\overline{X} \sim N(\mu, 1)$.

$$P\{\overline{X} - 2 < \mu < \overline{X} + 2\} = P\{|\overline{X} - \mu| < 2\}$$
$$= 2\Phi(2) - 1 \approx 0.9544$$

$\Rightarrow (\overline{X} - 2, \overline{X} + 2)$ 是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

置信区间的含义

若 $\mu = 0.5$, 当 $\overline{x}$ 分别为 3, 2, 1 时, 对应置信区间为:

$$(-1, 3) \quad (1, 5) \quad (0, 4)$$

对于一个具体的区间而言, 或者包含真值, 或者不包含真值, 无概率可言.

$(\overline{X} - 2, \overline{X} + 2)$ 是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间中 "置信水平为 0.95" 的意义是什么?

置信区间的含义

$$P\{\underline{\theta}(X_1,\ldots,X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1,\ldots,X_n)\} = 1-\alpha,$$

则置信区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 的含义为:

- 反复抽样多次 (每次样本容量都为 n). 则每个样本值确定一个区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$, 这个区间要么包含 θ , 要么不包含 θ. 置信水平 $1-\alpha$ 是指: 这些区间中包含 θ 的比例约为 $1-\alpha$.

置信区间的含义

例如反复抽样 10000 次,

- 当 $\alpha = 0.05$, 即置信水平为 95% 时, 10000 个区间中包含 θ 真值的约为 9500 个;
- 当 $\alpha = 0.01$, 即置信水平为 99% 时, 10000 个区间中包含θ 的真值的约为 9900 个.

求置信区间步骤

设 θ 是总体的未知参数, $X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 给定置信水平 $1-\alpha$,

1. 构造枢轴量(不依赖 θ 及未知参数的函数)

$$W = W(X_1, \cdots, X_n; \theta).$$

2. 确定常数 a, b 使得

$$P\{a < W(X_1, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1 - \alpha$$

3. 解得 θ 的取值范围即为置信区间.

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, μ 未知, $X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, μ 未知, $X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解: $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，且

$$(\overline{X})^* = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 所服从的分布 $N(0,1)$ 不依赖于任何未知参数. 按标准正态分布的上 α 分位数的定义，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha.$$

这样，我们就得到了 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_{\alpha/2},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成

$$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

$\square$

这样，我们就得到了 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}x_{\alpha/2},\quad \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成

$$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

$\square$

- 正态总体，σ^2 已知，则未知参数 μ 的枢轴量为 $(\overline{X})^*=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$.

枢轴量（补充）

枢轴量和统计量的区别:

(1) 枢轴量是样本和待估参数的函数, 其分布不依赖于任何未知参数;

(2) 统计量只是样本的函数, 其分布常依赖于未知参数.

- 枢轴量通常可由未知参数的点估计得到. 比如正态总体的区间估计.

单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的枢轴量

- μ 的枢轴量:

$$\begin{cases} (\overline{X})^* = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), & (\sigma^2 \text{ 已知}) \\ \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), & (\sigma^2 \text{ 未知}) \end{cases}$$

- σ^2 的枢轴量: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, μ 未知.

两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的枢轴量

- $\mu_1-\mu_2$ 的枢轴量:

$$\begin{cases} (\overline{X}-\overline{Y})^* = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1), & (\sigma_1^2,\sigma_2^2 \text{ 已知}) \\ \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2), & (\sigma_1^2=\sigma_2^2\text{未知} \end{cases}$$

  其中 $S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

- $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的枢轴量: $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$. ($\mu_1,\mu_2$ 未知)

单侧置信区间

定义

若

$$P\{\theta > \underline{\theta}(X_1, ..., X_n)\} \geq 1 - \alpha,$$

则 $(\underline{\theta}, \infty)$ 称为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为单侧置信下限.

若

$$P\left\{\theta < \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\right\} \geq 1 - \alpha,$$

则 $(-\infty, \overline{\theta})$ 称为参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\overline{\theta}$ 称为单侧置信上限.

单侧置信区间和双侧置信区间的关系

$\underline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1$ 的单侧置信下限,
$\overline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_2$ 的单侧置信上限,
$\Longrightarrow (\underline{\theta}, \overline{\theta})$是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1-\alpha_2$ 的双侧置信区间.

单侧置信区间和双侧置信区间的关系

$\underline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1$ 的单侧置信下限,
$\overline{\theta}$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_2$ 的单侧置信上限,
$\Longrightarrow (\underline{\theta}, \overline{\theta})$是 θ 的置信水平为 $1-\alpha_1-\alpha_2$ 的双侧置信区间.

证明: $P\{\underline{\theta} < \theta\} \geq 1-\alpha_1, \quad P\left\{\theta < \overline{\theta}\right\} \geq 1-\alpha_2$ 由加法公式,

$$\begin{aligned} P\left\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\right\} &= P\{\underline{\theta} < \theta\} + P\left\{\theta < \overline{\theta}\right\} - 1 \\ &\geq 1-\alpha_1-\alpha_2. \end{aligned}$$ □

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, μ 未知, $X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

例

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, μ 未知, $X_1, \cdots, X_n$ 为样本, 求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

解: 枢轴量为

$$(\overline{X})^* = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} = -z_\alpha\right\} = 1-\alpha,$$

$$P\left\{\mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right\} = 1-\alpha.$$

所以 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限为 $\overline{\mu} = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$.

正态总体均值 μ 的置信区间 (σ^2 已知时)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本. $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 置信水平为 $1-\alpha$.

- σ^2 已知时, 取枢轴量 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, 则 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$$

σ^2 已知时, $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计, 枢轴量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1),$$

设常数 $a<b$ 满足:

$$P\{a<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<b\} \geq 1-\alpha$$

等价于

$$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}b<\mu<\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a\right\} \geq 1-\alpha$$

此时区间的长度为 $L=(b-a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

由正态分布的对称性知，当

$$-a = b = z_{\alpha/2}$$

时，区间的长度达到最短 $L = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

固定 n, L 变大，$z_{\alpha/2}$ 增大，则 $(1-\alpha)$ 增大，置信水平提高，精确度降低；反之亦然.

所以，μ 的

- 双侧置信区间为:

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right),$$

- 单侧置信下限为 $\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$,
- 单侧置信上限为 $\overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$.

正态总体均值 μ 的置信区间 (σ^2 未知时)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本. $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.

- σ^2 未知时, 取枢轴量 $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 则 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

σ^2 未知时, S^2 是 σ^2 的无偏估计, 用 S 替换 σ, 得枢轴量

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

由

$$-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)$$

解得,

$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$$

所以 μ 的

- 置信区间为:

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

- 单侧置信下限为 $\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$,
- 单侧置信上限为 $\overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$.

例

某袋装食品重量 (单位: 克) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 现从一大批该产品中随机抽取 16 件, 称得重量为:

506 508 499 503 504 510 497 512
514 505 493 496 506 502 509 496

$(\bar{x} = 503.75, s = 6.2022,)$ 求在

(1) $\sigma = 3$;

(2) σ 未知

两种情况下 μ 的置信水平为 95% 的双侧置信区间.

解: $n=16, n-1=15, \alpha/2=0.025$. 计算得
$\overline{x}=503.75, s=6.2022$.
(1) $\sigma=3$, 查表得 $z_{0.025}=1.96$ 所以, μ 的置信水平为 95% 的置信区间为
$(\overline{x}-\frac{3}{\sqrt{16}}z_{0.025}, \overline{x}+\frac{3}{\sqrt{16}}z_{0.025})=(502.28, 505.22)$.

(2) σ 未知, 查表得 $t_{0.025}(15)=2.1315$ 此时, μ 置信水平为 95% 的置信区间为

$$(\overline{x}-\frac{S}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15), \overline{x}+\frac{S}{\sqrt{10}}t_{0.025}(15))=(500.4, 507.1)$$

$\square$

实际中 σ^2 未知的情况更多.

例

设新生儿体重 (单位: 克) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知. 现从某妇产医院随机抽查 16 名新生儿, 称得重量为:

3200 3050 3840 4450 2900 4180 2600 3530
2270 2750 3450 3730 3620 2150 2650 2830

求 μ 的置信水平为 95% 的双侧置信区间.
$(\overline{x} = 3200, s = 665.48)$

解：$n=16, \alpha=0.05$, σ 未知.

计算得 $\overline{x}=3200, s=665.48$

查表得 $t_{0.025}(15)=2.1315$

所以 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为:

$$(\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15), \overline{x}+\frac{s}{\sqrt{16}}t_{0.025}(15))=(2845.4, 3554.6).$$

$\square$

其他总体均值的区间估计

总体 X 的均值为 μ, 方差为 σ^2, 非正态分布或不知分布形式. 样本为 $X_1, \ldots, X_n$. 当 n 充分大 (一般 $n > 30$) 时, 由中心极限定理知,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

设 $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

- σ^2 已知时, 置信区间近似为 $(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n})$.
- σ^2 未知时, 置信区间近似为 $(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}S/\sqrt{n})$.

例

某市随机抽取 1500 个家庭，调查知道其中有 375 家拥有私家车. 试根据此调查结果，求该市拥有私家车比例 p 的置信水平为 95% 近似置信区间.

解: $\hat{p} = \bar{x} = \frac{375}{1500} = 0.25$, $s^2 \approx \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.1875$ 代入近似置信区间

$$\left(\bar{X} - z_{0.025}S/\sqrt{n}, \quad \bar{X} + z_{0.025}S/\sqrt{n}\right)$$

得近似置信区间为 $(0.228, 0.272)$. $\square$

正态总体方差 σ^2 的置信区间 (μ 未知时)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本. $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.

- μ 未知, 取枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

S^2 为 σ^2 的无偏估计, 故取枢轴量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

则

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

等价的,

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha.$$

正态总体标准差 σ 的置信区间 (μ 未知时)

设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本. $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.

- μ 未知, 取枢轴量 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 则 σ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left(\frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \frac{\sqrt{(n-1)}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

例

某袋装食品重量 (单位: 克) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知. 现从一大批该产品中随机抽取 16 件, 称得重量为:

506 508 499 503 504 510 497 512
514 505 493 496 506 502 509 496

求标准差 σ 的置信度为 95% 置信区间.

例

一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大．为了评估新苹果，她随机挑选了 25 个测试重量 (单位：克)，其样本方差为 $s^2 = 4.25$．试求 σ^2 的置信水平为 95% 置信区间．

解: $n = 25, s^2 = 4.25, \alpha = 0.05$ 查表得:
$\chi^2_{0.025}(24) = 39.4, \quad \chi^2_{0.975}(24) = 12.4;$

$$\chi^2_{0.95}(24) = 13.85,$$

σ^2 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right) = (2.59, 8.23).$$

$\square$