Lec-3. 条件概率

主讲教师: 吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页: http://wulisu.cn

目录

条件概率

例 (引例)

将一枚硬币抛两次, 观察正反面. 设 A 为至少有一次为正面, B 为两次相同面. 求已知 A 发生的条件下 B 发生的概率.

解: 样本空间 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$,
$A = \{HH, HT, TH\}$, $B = \{HH, TT\}$.
由于事件 A 已经发生, 所以这时试验的所有可能结果只有三种, 而其中事件 B 包含的基本事件只占其中的一种, 所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

表示在 A 发生的条件下, B 发生的条件概率.

在这个例子中, 若不知道事件 A 发生, 则事件 B 发生的概率为 $P(B)=\frac{2}{4}$. 所以

$$P(B|A)\neq P(B).$$

其原因在于事件 A 的发生改变了样本空间, 使它由原来的 S 缩减为新的样本空间 $S_A=A$.

条件概率的定义

定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}, P(A)>0$$

称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

条件概率是概率

性质 ($P(\cdot \mid A)$ 是概率)

- 非负性: $P(B|A) \geq 0$;
- 规范性: $P(S|A) = 1$;
- 可列可加性: $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ 满足 $B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j$, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 B_2|A).$$

$P(\cdot|A)$ 具有概率的所有性质. 例如:

- $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$.
- 加法公式

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

- 若 $C \subset B$, 则
  $P(B - C|A) = P(B|A) - P(C|A)$,
  $P(C|A) \le P(B|A)$.

例

一个盒子有 4 只产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从中取两次, 每次任取一只作不放回抽样. 设事件 A 为第一次取到的是一等品. B 为第二次取到的是一等品. 求 $P(B|A)$.

解: 将产品编号: 1,2,3 一等品, 4 为二等品. 以 (i,j) 表示第一次, 第二次分别取到第 i 号, 第 j 号产品. 则

$$\begin{aligned}S=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)(4,3)\}\end{aligned}$$

含 $12=C_4^1C_3^1$ 个样本点.

$$\begin{aligned}A=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,4)\}\end{aligned}$$

含 $9=C_3^1C_3^1$ 个样本点.

$$AB=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

含 $6=C_3^1C_2^1$ 个样本点. 所以,

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}.$$

□

乘法定理

- 设 $P(A) > 0$, 则有乘法公式,

$$P(AB) = P(B|A)P(A).$$

- 设 $P(B) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

乘法定理的推广

- 三个事件 A, B, C 满足 $P(AB) > 0$,

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A).$$

- n 个事件 $A_1, \cdots, A_n$, $P(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \cdots A_{n-2}) \times \cdots \times P(A_2|A_1)P(A_1).$$

例

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$.
求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B)$.

例

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$.
求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B)$.

解: $P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12}$,
$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{2}$. 所以
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}|A\cup B)&=1-P(A|A\cup B)\\&=1-\frac{P(A\cap(AUB))}{P(A\cup B)}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

例

设袋中有 5 个红球, 4 个白球, 采用不放回抽样, 每次取一个, 取 3 次.

(1) 求前两次中至少有一次取到红球的概率.

(2) 已知前两次中至少有一次取到红球, 求前两次中恰有一次取到红球的概率.

(3) 求第 1,2 次取到红球第 3 次取到白球的概率.

解: 记 $A_i=\{$第i次取到红球$\}$, $i=1,2,3$, 则第 i 次取到白球为 $\bar{A}_i$.

$B=\{$前两次至少有一次取到红球$\}$,

$C=\{$前两次恰有一次取到红球$\}$.

(1) $P(\bar{B})=P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$

$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{6}$.

(2) $P(BC)=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$,

$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{5}{6}}=\frac{2}{3}$

或 $P(C|B)=1-P(\bar{C}|B)=1-\frac{P(B\bar{C})}{P(B)}=1-\frac{P(A_1A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3}$.

(3)

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\bar{A}_3)&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)\\&=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}.\end{aligned}$$

□

例

设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$, 试求落下三次未打破的概率.

解: $A_i=\{$第i次落下打破$\}$, $i=1,2,3$,
$B=\{$落下三次未打破$\}$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \\ &= P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\ &= (1-\frac{9}{10})(1-\frac{7}{10})(1-\frac{1}{2}) = \frac{3}{200}. \end{aligned}$$

或 $\bar{B}=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$,
$A_1, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 互不相容, 则
$P(\bar{B})=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$.
$P(\bar{A}_1A_2)=P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)=\frac{7}{10}(1-\frac{1}{2})=\frac{7}{20}$.
$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$. $\square$

样本空间的划分

集合 S 的一个划分是指将 S 表示为一组互不相交子集的并集. 从而有样本空间的划分:

定义

设 S 为样本空间, $B_1, B_2, ..., B_n$ 为一组事件. 若

(i) 不重 (互不相容): $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

(ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$.

则 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为样本空间 S 的一个划分

样本空间的划分

集合 S 的一个划分是指将 S 表示为一组互不相交子集的并集. 从而有样本空间的划分:

定义

设 S 为样本空间, $B_1, B_2, ..., B_n$ 为一组事件. 若

(i) 不重 (互不相容): $B_iB_j = \varnothing, \forall i \neq j$.

(ii) 不漏: $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$.

则 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为样本空间 S 的一个划分

- 若 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 S 的一个划分, 则每次试验 $B_1, B_2, ..., B_n$ 中必有且仅有一个发生.

例

甲、乙两人进行投骰子比赛, 得点数大者为胜, 若甲先投得了 5 点. 设样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{乙赢}\} = \{6\} \\ B &:= \{\text{平局}\} = \{5\} \\ C &:= \{\text{乙输}\} = \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

则事件 A, B, C 为样本空间 S 的一个划分.

全概率公式

定理

设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0(i = 1, 2, ..., n)$，则有全概率公式:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \\ \ldots + P(A|B_n)P(B_n) \\ = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

证明: $A = AS = AB_1 \cup ... \cup AB_n$,

$$(AB_i) \cap (AB_j) = \varnothing,$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1) + ... + P(AB_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + ... + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i). \qquad \square \end{aligned}$$

注: 全概率公式的主要用处在于它可以将一个复杂事件的概率问题, 分解为若干个简单事件的概率计算问题, 最后用概率的可加性求出最终结果. (化整为零)

贝叶斯 (Bayes) 公式

定理

设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0$, $P(A) > 0$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)} = \frac{p_i q_i}{\sum p_j q_j},$$

其中 $p(B_i) = p_i$, $P(A|B_i) = q_i$.

证: 由条件概率, 全概率公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}. \qquad \square$$

注: 特别地, $n = 2$, B_1, B_2 是 S 的一个划分. 记
$B_1 = B$, $B_2 = \bar{B}$, 则
$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$.
$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$.
$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$.

例

有一批同型号的节能灯, 已知其中由一厂生产的占 15%, 二厂生产的占 80%, 三厂生产的占 5%. 又知这三厂的节能灯次品率分别为 2%, 1%, 3%. 问

(1) 从这批节能灯中任取一件, 求它是次品的概率.

(2) 从这批节能灯中任取一件, 发现是次品, 那么它分别是由各厂生产的概率是多少?

解: $A=\{$取到的是一只次品$\}$,
$B_i=\{$取到的产品是i 厂的节能灯$\}$, $i=1,2,3$ 为 S 的一个划分. 则有

$$P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05$$

$$P(A|B_1)=0.0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03.$$

(1) 由全概率公式

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.0125.$

(2) 贝叶斯 (Bayes) 公式 $P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{3}P(B_j)P(A|B_j)}$

$P(B_1|A)=0.24$, $P(B_2|A)=0.64$, $P(B_3|A)=0.12$. $\square$

例

一小学举办家长开放日，欢迎家长参加活动．小明的母亲参加的概率为 80%．若母亲参加，则父亲参加的概率为 30%；若母亲不参加，则父亲参加的概率为 90%．

(1) 求父母都参加的概率；

(2) 求父亲参加的概率；

(3) 在已知父亲参加的条件下，求母亲参加的概率．

小结

- 条件概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

小结

- 条件概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.
- 乘法公式: $P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$.

小结

- 条件概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.
- 乘法公式: $P(AB) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$.
- 全概率公式:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

小结

- 条件概率: $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.
- 乘法公式: $P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$.
- 全概率公式:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$$

- 贝叶斯公式:

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}.$$