Lec-4. 独立性

主讲教师：吴利苏 **(wulisu@sdust.edu.cn)**
主　　页：http://wulisu.cn

目录

例

对以往数据分析，当机器调整良好时，产品合格率为 98%，而当机器发生故障时合格率为 55%，每天早上机器开动时，机器调整良好时概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格时，机器调整良好的概率.

解: 设 $A=\{$产品合格$\}$, $B=\{$机器良好$\}$, 求 $P(B|A)$.

$P(A|B)=0.98,\ P(A|\bar{B})=0.55,$

$P(B)=0.95,\ P(\bar{B})=0.05.$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=0.97. \quad \square$$

95% 是由以往数据分析得到的先验概率,

97% 是得到信息之后再重新加以修正的后验概率.

例

根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下效果：设

$A = \{$试验反应是阳性$\}$,

$C = \{$被诊断患有癌症$\}$.

且 $P(A|C) = 0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C}) = 0.95$.

已知某群体 $P(C) = 0.005$, 试求 $P(C \mid A)$, 问这种方法能否用于普查?

解:
$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C}))}=0.087.$$

若用于普查, 则准确性只有 8.7%, 也就是 1000 个具有阳性反应的病人中只有 87 人确定患癌症. 所以不宜用于普查. 若阳性需要作进一步检查. □

独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

独立性

- 一般情况下，

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率，即

$$P(B|A) = P(B)$$

独立性

- 一般情况下,

$$P(B|A) \neq P(B).$$

- 但若事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率, 即

$$P(B|A) = P(B)$$

则称事件 A, B 独立.

例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次, 每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设 $A_i = \{\text{第 i 次取到正品}\}, i = 1, 2$. 比较 $P(A_2|A_1)$ 与 $P(A_2)$.

例

有 10 件产品，其中 8 件为正品，2 件次品. 从中取 2 次，每次取 1 件.

(1) 采用不放回抽样;

(2) 采用放回抽样.

设 $A_i = \{第\ \mathrm{i}\ 次取到正品\}, i = 1, 2$. 比较 $P(A_2|A_1)$ 与 $P(A_2)$.

解：

- 不放回抽样: $P(A_2|A_1) = \frac{7}{9} \neq P(A_2) = \frac{8}{10}$.
- 放回抽样: $P(A_2|A_1) = \frac{8}{10} = P(A_2)$. □

因此, 放回抽样时, A_1 的发生对 A_2 的发生概率不影响.

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$$

且另一方面

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1)\, P(A_2)}{P(A_2)} = P(A_1)\,,$$

即 A_2 的发生对 A_1 的发生概率也不影响.
此时就称事件 A_1 与 A_2 相互独立.

独立性

定义

设 A, B 两事件, 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立, 简称**独立**.

独立性

定义

设 A, B 两事件, 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立, 简称**独立**.

注: 之所以用上述方式定义独立性，一是因为 A 与 B 的对称性，二是不需要条件概率存在的条件，即事件的概率可以为 0.

定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(A)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A) = P(B).$
- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(A|B) = P(A).$

定理

- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(A)>0}{\Longleftrightarrow} P(B|A) = P(B)$.
- $P(AB) = P(A)P(B) \overset{P(B)>0}{\Longleftrightarrow} P(A|B) = P(A)$.

直观来看，若 A 与 B 相互独立，则不论 A 是否发生，都不能提供 B 是否发生的信息，反之也是. 这就有下面的性质.

定理

下列说法等价 *(TFAE)*.

- A, B 独立;
- $\bar{A}, B$ 独立;
- $A, \bar{B}$ 独立;
- $\bar{A}, \bar{B}$ 独立.

证明：仅证

$P(AB) = P(A)P(B) \Longleftrightarrow P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$.

当 $P(AB) = P(A)P(B)$ 时,

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A - AB) \\ &= P(A) - P(AB) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

反之也成立. $\square$

多事件的独立性

定义

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个随机事件, 若对 $2 \le k \le n$, 均有:

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

三事件的独立性

特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

三事件的独立性

特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
P(AB) = P(A)P(B), \\
P(AC) = P(A)P(C), \\
P(BC) = P(B)P(C),
\end{array}
\right\} \text{两两独立} \\
P(ABC) = P(A)P(B)P(C).
\end{array}
\right.
$$

三事件的独立性

特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(BC) = P(B)P(C), \end{array}\right\} \text{两两独立} \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{array}\right.$$

两两独立 $\overset{?}{\Rightarrow}$ 相互独立?

三事件的独立性

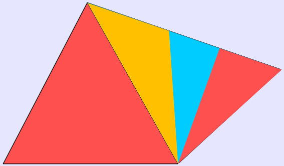
特别地, 对于事件 A, B, C 相互独立的定义为:

$$
\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
P(AB) = P(A)P(B), \\
P(AC) = P(A)P(C), \\
P(BC) = P(B)P(C),
\end{array}\right\} \text{两两独立} \\
P(ABC) = P(A)P(B)P(C).
\end{cases}
$$

两两独立 $\overset{\times}{\Rightarrow}$ 相互独立.

例

有一个正四面体，现在给一面涂上红色，一面涂黄色，一面涂蓝色，还有一面涂红黄蓝.



现任取一面，令

$A = \{含红色\}$, $B = \{含黄色\}$,$C = \{含蓝色\}$.

问 A, B, C 是否两两独立？是否相互独立？

解: 四个面分别标 1, 2, 3, 4. 则 $S=\{1,2,3,4\}$.

$A=\{1,4\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{3,4\}$.

$AB=BC=AC=ABC=\{4\}$.

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$.

$P(AB)=P(BC)=P(AC)=P(ABC)=\frac{1}{4}$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

故, 两两独立但不相互独立. $\square$

推论

(1) 若 $A_1, A_2, ..., A_n(n \geq 3)$ 相互独立, 则其中任意 $k\,(2 \leq k \leq n)$ 个事件也相互独立.

(2) 若 n 个事件 $A_1, ..., A_n$ 相互独立, 则将 $A_1, ..., A_n$ 中任意个事件换成它们的对立事件, 所得 n 个事件仍相互独立.

(3) 若 $A_1, ..., A_n$ 相互独立, 则

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n). \end{aligned}$$

例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

例 (射击问题)

设每一名机枪手击落飞机的概率都是 0.2, 若 10 名机枪手同时射击一架飞机, 问击落飞机的概率.

解: $A_i = \{$第 i 人击落飞机$\}$, $i = 1, ..., 10$.

$B = \{$击落飞机$\}$.

$B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10}$,

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10}) \\
&= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{10}}) \\
&= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 ... \bar{A}_{10}) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ... P(\bar{A}_{10}) \\
&= 1 - 0.8^{10} = 0.893. \qquad \square
\end{aligned}
$$

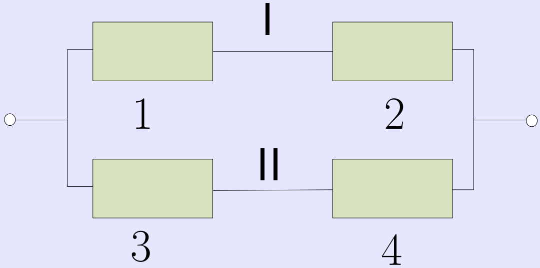
实际问题中, 常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性.

一般，出现 A, B 没有关联或关联很微弱, 或出现" 各自", " 同时", " 互不干扰", " 独立地" 等字眼，则可认为 A, B 是独立的.

一旦确定事件是相互独立的，在计算积事件的概率时，尽可转化为事件概率的乘积进行计算.

例

设有 4 个独立元件构成的系统, 设每个元件能正常运行的概率为 p_i. 求系统正常运行的概率.

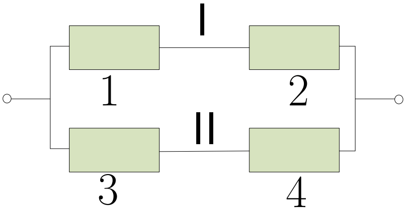


解:

$A_i=\{$第i个元件运行正常$\}$,

$i=1,2,3,4.$

$A=\{$系统正常运行$\}$.



系统由 I, II 两条线路组成, 当且仅当至少有一条线路中的两个元件正常工作时, 系统正常运行. $A=A_1A_2\cup A_3A_4$,

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-\\&\qquad P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4).\\&=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4.\end{aligned}$$

$\Box$

例

某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故，设他每次操作发生事故的概率为 $P = 0.0001$，独立重复进行了 n 次．求

(1) n 次都不发生事故的概率；

(2) 至少有一次发生事故的概率．

解:$A_i=\{$第 i 不发生事故$\}$, $i=1,...n$.
$B=\{n$ 次都不发生$\}$, $C=\{$至少有一次$\}$.
则 $A_1,...,A_n$ 相互独立. $P(A_i)=1-p=0.9999$.
$P(B)=P(A_1...A_n)=(1-p)^n$,
$P(C)=1-P(B)=1-(1-p)^n$,
当 $n\to\infty$ 时, $P(C)\to 1$. □

实际推断原理: 小概率事件 $P(A)=0.0001$, 进行一次试验, A 几乎不发生.
但"小概率事件"在大量独立重复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的. 不能忽视.
例如, $n=7000$, $P(C)=0.5053>0.5$.

例

甲, 乙, 丙三人同时对飞机射击. 三人击中的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$. 飞机被一人击中而被击落的概率 0.2, 被两人击中落下的概率为 0.6, 被三人击中必定落下. 求飞机被击落的概率.

解: $A_i = \{恰有 i 人击中\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, $A = \{甲击中\}$, $B = \{乙击中\}$, $C = \{丙击中\}$, $D = \{飞机被击落\}$. A_0, A_1, A_2, A_3 是 S 的一个划分, 且 $P(D|A_0) = 0$, $P(D|A_1) = 0.2$, $P(D|A_2) = 0.6$, $P(D|A_3) = 1$.

全概率公式 $P(D) = \sum_{i=0}^{3} P(D|A_i)P(A_i)$.

- $A_0 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

$$P(A_0) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.09.$$

- $A_1 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$. 互斥

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C) \\ &= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

- $A_2 = AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) \\ &= 0.41. \end{aligned}$$

- $A_3 = ABC$.

$$P(A_3) = P(A)P(B)P(C) = 0.14.$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A_0)P(A_0) + P(D|A_1)P(A_1) + \\ &\qquad P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) \\ &= 0.458. \end{aligned}$$

□

练习

甲、乙两人进行猜点博弈，记事件 A_i 为第 i 局甲胜. 已知每局猜点相互独立, 且 $P(A_i)=0.5, i=1,2,\cdots$. 两人约定若甲胜，则乙付给甲 2 枚筹码，若甲负，则甲付给乙 1 枚筹码. 当一人筹码输空时，判该人博弈失败，博弈结束. 目前甲有 2 枚筹码，乙有 3 枚筹码. 问

(1) 3 局内博弈结束的概率.

(2) 3 局内甲乙博弈胜率各为多少.

(3) 甲获得最终胜利的概率为多少？