Lec-8. 二维随机变量

主讲教师：吴利苏 (**wulisu@sdust.edu.cn**)
主　　页：wulisu.cn

目录

连续型随机变量函数的分布函数

Step-1 根据 X 的取值范围给出 Y 的取值范围;

Step-2 写出 Y 的分布函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\};$$

Step-3 给出 $\{Y \le y\}$ 的等价事件的概率分布
$F_Y(y) = P\{X \in D\};$

Step-4 求导给出 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

例

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: $Y = X^2 \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} \\
&= P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})' & y > 0; \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})) & y > 0. \\ 0 & y \leq 0. \end{cases} \qquad \square
$$

χ^2 分布

定义

若 $X \sim N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < +\infty$. 则 $Y = X^2$ 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0; \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2 分布.

一般地, 若 $X_1, \ldots, X_n$ 服从 $N(0,1)$ 分布, 则 $\chi^2 = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布.

反函数法求连续型随机变量的概率密度

- 上例中，当 $y>0$ 时，以 $-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}$ 代替 $X^2\leq y$ 可以推广到求连续型随机变量的更一般的函数的函数分布或概率密度.
- 设 $Y=g(X)$, 若连续函数 $y=g(x)$ 具有反函数 $x=h(y)$, 则 $Y=g(X)<y$ 可用 $x\in\{h(y)\mid g(X)<y\}$ 代替.
- 比如, 设 g 为严格单调函数，则有下面定理.

定理

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty < x < +\infty$. 又设 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x) > 0$(或 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)] \cdot |h'(y)| & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$,
$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

证: $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 它的反函数存在, 且在 (α, β) 内严格单调增, 可导.
记 $F_X(x)$, $F_Y(y)$,

- $y \le \alpha$, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$,
- $y \ge \beta$, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$,
- $\alpha < y < \beta$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} \\ &= P\{X \le h(y)\} = F_X(h(y)) \end{aligned}$$

.

所以, $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

$g'(x) < 0$，同样可以证明

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)](-h'(y)) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases} \qquad \square$$

$g'(x) < 0$，同样可以证明

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)](-h'(y)) & \alpha < y < \beta; \\ 0 & 其他. \end{cases} \qquad \square$$

注

若 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 以外等于零，则只需假设在 $[a, b]$ 上恒有 $g'(x) > 0$(或 $g'(x) < 0$)，

$$\alpha = \min\{g(a), g(b)\}, \beta = \max\{g(a), g(b)\}.$$

例

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b(a \neq 0)$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

例

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b(a \neq 0)$, 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$,

$y = g(x) = ax + b$, $g'(x) = a \neq 0$,

$x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, $h'(y) = \frac{1}{a}$,

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-(b+a\mu))^2}{2\sigma^2 a^2}}.$$

即 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

特别取 $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, 得 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. $\square$

例

$X \sim N(1,3)$, $Y = 3-2X$, 则 Y 服从什么分布?

例

$X \sim N(1,3)$, $Y = 3 - 2X$, 则 Y 服从什么分布?

解: $Y \sim N(1, 12)$.

例

设电压 $V = A\sin\Theta$, 其中 A 是一个已知得正常数, 相角 Θ 是一个随机变量且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 试求电压 V 的概率密度.

例

设电压 $V = A\sin\Theta$, 其中 A 是一个已知得正常数, 相角 Θ 是一个随机变量且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 试求电压 V 的概率密度.

解: $v = g(\Theta) = A\sin\Theta$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上恒有 $g'(\Theta) = A\sin\Theta > 0$.
且有反函数
$\Theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$, $h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}$.

$$f(\Theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \Theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

得 $$\psi(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}} & v \in (-A, A); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$ □

设 $g(x)$ 是连续函数,

- X 是离散型 $\Rightarrow$ $Y=g(X)$ 是离散型;
- X 是连续型 $\not\Rightarrow$ $Y=g(X)$ 是连续型.

反例

例

$X \sim U(0,2)$, $g(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1]; \\ 1 & x \in [1,2]. \end{cases}$
问 $Y = g(X)$ 是否为连续型或离散型随机变量?

解：$X \sim U(0,2)$, $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0,2); \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$

Y 的取值为 $[0,1]$, 所以

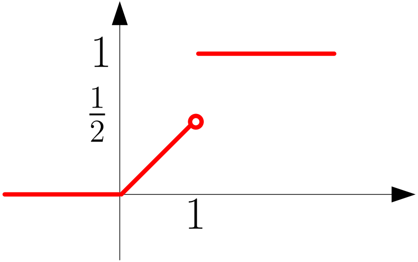
当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$;

当 $y \ge 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$;

当 $0 \le y < 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P\{Y \le y\} &= P\{g(X) \le y\} \\
&= \int_{g(x) \le y} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{y} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{y}{2}.
\end{aligned}
$$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0;\\ \frac{y}{2} & 0\le y<1;\\ 1 & y\ge 1.\end{cases}$



$F_Y(y)$ 在 $y=1$ 处不连续，所以 $Y=g(X)$ 不是连续型随机变量；$F_Y(y)$ 也不是阶梯函数，所以 $Y=g(X)$ 不是离散型随机变量. □

Chap-3. 多维随机变量

引例

例

研究学龄儿童的发育情况, 仅研究身高 H 或体重 W 是不够的, 需要同时考察身高和体重, 研究 H 和 W 之间的关系. 这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量.

引例

例

炮弹的弹着点分布, 每枚炮弹的弹着点位置需要由它的横坐标 X 和纵坐标 Y 来确定. X, Y 定义在同一个样本空间.

二维随机变量

定义

设 E 是一个随机试验, 样本空间 $S=\{e\}$. 设 $X=X(e)$ 与 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的向量 (X,Y) 叫做**二维随机向量**或**二维随机变量**.

注: (X,Y) 的性质不仅与 X 及 Y 有关, 还依赖于这两个的相互关系. 需要将 (X,Y) 作为一个整体来研究.

分布函数

定义

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y, 二元函数

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} \\ &\triangleq P\{X \leq x, Y \leq y\} \end{aligned}$$

称为 (X, Y) 的分布函数, 或 X 和 Y 的联合分布函数.

(X, Y) 看成平面上随机点的坐标, 则

- $F(x, y)$ 在 (x, y) 处的函数值就是 (X, Y) 落在以点 (x, y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率;
- $P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$.

$F(x, y)$ 的性质

性质

(1) $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数.

即对任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时,

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y);$$

对任意固定的 x, 当 $y_2 > y_1$ 时,

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1).$$

$F(x, y)$ 的性质

性质

(2) $0 \le F(x, y) \le 1.$

$F(x, y)$ 的性质

性质

(2) $0 \leq F(x, y) \leq 1.$

对任意固定的 y,

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0;$$

对任意固定的 x,

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0.$$

$F(-\infty, -\infty) = 0, \ F(+\infty, +\infty) = 1.$

$F(x,y)$ 的性质

性质

(3) $F(x,y)$ 是关于 x 右连续, 关于 y 右连续.

$F(x, y)$ 的性质

性质

(3) $F(x, y)$ 是关于 x 右连续, 关于 y 右连续.

即 $F(x+0, y) = F(x, y)$, $F(x, y+0) = F(x, y)$.

$F(x, y)$ 的性质

性质

(4) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

$F(x, y)$ 的性质

性质

(4) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

$F(x, y)$ 的性质

性质

(4) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 有
$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

证:

$$\begin{aligned}
&P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\
=&P\{X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\} \\
=&P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\} \\
&\qquad - P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \\
=&F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

二维离散型随机变量

定义

如果二维随机变量 (X, Y) 全部可能取到的值是有限对或可数多对时, 则称 (X, Y) 是**二维离散型随机变量**.

二维离散随机变量的联合概率分布律

定义

二维离散型随机变量 (X, Y) 所有可能取的值为 (x_i, y_j), 称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots,$$

为 (X, Y) 的联合概率分布律, 简称 (X, Y) 的分布律.

二维离散随机变量的联合概率分布律

(X, Y) 的分布律 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$ 需满足：

- $p_{ij} \geq 0$;
- $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

联合分布律的表示

- $P\{(X, Y) \in D\} = \sum_{(x_i,x_j)\in D} p_{ij}$.
- 表格形式

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

联合分布律的表示

亦或

Y / X	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

例

设随机变量 X 在 $1, 2, 3, 4$ 四个数中等可能地取一个值, Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值, 试求 (X, Y) 的分布律.

解: $\{X=i, Y=j\}$ 的取值：$i=1,2,3,4$; j 取不大于 i 的整数.
由乘法公式

$$P\{X=i, Y=j\} = P\{Y=j|X=i\}P\{X=i\}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4} & i=1,2,3,4, j\le i; \\ 0 & i<j. \end{cases}$$

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

在上例中, X, Y 的分布律

$P\{X = i\} = \frac{1}{4}$,

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{4} P\{X = i\}P\{Y = j|X = i\}.$$

- X 的分布律就是联合分布律表中的横向相加.
- Y 的分布律就是联合分布律表中的纵向相加.

例

一盒子中有 10 件产品, 其中 6 件正品, 4 件次品, 从中取 1 件产品检验, 不放回, 再取一件产品检验, 引入如下随机变量 X, Y

$$X = \begin{cases} 0 & \text{第一次取次品;} \\ 1 & \text{第一次取正品.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{第二次取次品;} \\ 1 & \text{第二次取正品.} \end{cases}$$

求 (X, Y) 的联合分布律和分布函数.

解: (X, Y) 可能取值 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

由乘法公式 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

$$
\begin{aligned}
P\{X=0, Y=0\} &= P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} = \tfrac{4}{10} \times \tfrac{3}{9} \\
&= \tfrac{2}{15}, \\
P\{X=0, Y=1\} &= P\{X=0\}P\{Y=1|X=0\} = \tfrac{4}{10} \times \tfrac{6}{9} \\
&= \tfrac{4}{15}, \\
P\{X=1, Y=0\} &= P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\} = \tfrac{6}{10} \times \tfrac{4}{9} \\
&= \tfrac{4}{15}, \\
P\{X=1, Y=1\} &= P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\} = \tfrac{6}{10} \times \tfrac{5}{9} \\
&= \tfrac{5}{15},
\end{aligned}
$$

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

求分布函数

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时, $F(x,y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}=0$,

当 $0\leq x<1$, $0\leq y<1$ 时, $F(x,y)=p_{11}=\frac{2}{15}$,

当 $0\leq x\leq 1$, $y\geq 1$ 时, $F(x,y)=p_{11}+p_{12}=\frac{6}{15}$,

当 $x\geq 1$, $0\leq y<1$ 时, $F(x,y)=p_{11}+p_{21}=\frac{6}{15}$,

当 $x\geq 1$, $y\geq 1$ 时, $F(x,y)=1$. $\square$

离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$$

连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数

如果存在非负函数 $f(x, y)$ 使得对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\,du\,dv$$

则称 (X, Y) 是连续型二维随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为 (X, Y) 的概率密度, 或 X 和 Y 的联合概率密度.

$f(x, y)$ 的性质

(1) $f(x, y) \geq 0$;

$f(x,y)$ 的性质

(1) $f(x,y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1$;

$f(x, y)$ 的性质

(1) $f(x, y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$;

(3) 设 G 是 xOy 平面上的区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\, dx dy;$$

$f(x, y)$ 的性质

(1) $f(x, y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = F(+\infty, +\infty) = 1$;

(3) 设 G 是 xOy 平面上的区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,dxdy;$$

(4) 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 则有 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

由性质 (4), 在连续点 (x, y) 处有

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\}}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0^+ \\ \Delta y \to 0^+}} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[F(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$- F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)]$$

$$= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$= f(x, y).$$

这表明若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 当 $\Delta x \Delta y$ 很小时,

$$P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x, y)\Delta x \Delta y,$$

即 (X, Y) 落在小长方形 $(x, x + \Delta x] \times (y, y + \Delta y]$ 内的概率近似地等于 $f(x, y)\Delta x \Delta y$.

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1$$

表示介于 $z=f(x,y)$ 与 xOy 平面的空间区域的体积为 1.

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1$$

表示介于 $z=f(x,y)$ 与 xOy 平面的空间区域的体积为 1.

$P\{(X,Y)\in G\}$ 的值等于以 G 为底, 以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶面的柱体体积.

例

设 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)} & x>0,\ y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

求 (1)$F(x,y)$, (2) $P\{Y \leq X\}$.

解: (1)

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\,dxdy$$
$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}) & x>0,y>0;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y) 看成平面上随机点的坐标, 即 $\{Y\le X\}=\{(X,Y)\in G\}$, 其中 G 为 xOy 上直线 $y=x$ 及其下方的部分.

则

$$P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty}2e^{-(2x+y)}\,dxdy=\frac{1}{3}.$$

□

两个常用分布

定义 (均匀分布)

设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S, 若 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S} & (x, y) \in D; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.

定义 (二维正态分布)

若 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}$; $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$. 则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$.

n 维随机变量

设 E 是一随机试验, $S = \{e\}$. 设 $X_1 = X_1(e)$, ..., $X_n = X_n(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个 n 维随机向量 $(X_1, ..., X_n)$ 叫做n 维随机向量或n 维随机变量.

n 维随机变量

对于任意 n 个实数, $x_1, ..., x_n$, n 元函数

$$F(x_1, ..., x_n) = P\{X_1 \le x_1, ..., X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, ..., X_n)$ 的分布函数或 $X_1, ..., X_n$ 的联合分布函数.