线性代数-7

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 22 日

回顾：矩阵的运算

- AB

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$，比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A - E)(A + E) = A^2 - E = (A + E)(A - E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A + B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n \times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}
  - A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;

回顾：矩阵的运算

- AB
  - 一般 $AB \neq BA \Rightarrow$ 左乘、右乘、可交换;
  - $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$;
  - $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA + B^2 \neq A^2 - B^2$;
  - $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ 或 $B = 0$;
  - $AX = AY \nRightarrow X = Y$;
  - $f(A)g(A) = g(A)f(A)$, 比如 $(A-E)(A+E) = A^2 - E = (A+E)(A-E)$;
- $|A|$
  - $|AB| = |A| \cdot |B|$;
  - $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$;
  - 一般 $|A+B| \neq |A| + |B|$;
- A^*
  - $A^* = (A_{ji})_{n\times n} = (A_{ij})^T$;
  - $AA^* = A^*A = |A| \cdot E$;
- A^{-1}
  - A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;
  - $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$.

本次课内容

1. 矩阵分块和分块矩阵

2. 矩阵的初等变换

3. 矩阵的等价

- 例：

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \triangleq \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21}=O_{3\times 2}, \qquad A_{22}=E_3.$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；

分块矩阵的概念

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；

分块矩阵的概念

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；
- 以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵.

分块矩阵的概念

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；
- 以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵.
- 分块原则：尽量分为便于讨论的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵和三角矩阵等.

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；
- 以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵.
- 分块原则：尽量分为便于讨论的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵和三角矩阵等.
- 例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 用一些竖线和横线将矩阵分成若干小矩阵，就是矩阵分块；
- 每个小矩阵被称为子块；
- 以子块为元素的形式上的矩阵被称为分块矩阵.
- 分块原则：尽量分为便于讨论的特殊矩阵，如单位矩阵、零矩阵、对角矩阵和三角矩阵等.
- 例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

分块矩阵的运算规则和矩阵的运算规则类似

- 矩阵 A, B 同型，且分法相同，则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

- $$\lambda\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$$

- 矩阵 A, B 可乘，且对任意 i, j，子块 A_{ik}, B_{kj} 可乘，则

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj}$.

-
$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$$

- 观点 1：A 行分块，B 列分块:

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n \\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n \end{pmatrix} = C$$

其中 $c_{ij} = \alpha_i^T\beta_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$.

例

实矩阵 $A = O$ 当且仅当方阵 $A^TA = O$.

例

实矩阵 $A = O$ 当且仅当方阵 $A^TA = O$.

- A^TA 为对称矩阵.

- 观点 2：A 不分块，B 列分块:

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 观点 2：A 不分块，B 列分块:

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程 $AX = B$, 将 X, B 写为列分块的形式，

$$\begin{aligned} AX = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} &= (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

- 观点 2：A 不分块，B 列分块:

$$AB = A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} = (A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_n)$$

- 矩阵方程 $AX = B$, 将 X, B 写为列分块的形式,

$$\begin{aligned} AX = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{pmatrix} &= (AX_1, AX_2, \cdots, AX_n) \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 矩阵方程可以看成具有相同系数矩阵的 n 个线性方程组 $AX_i = \beta_i$.

- 观点 3：A 列分块，B 行分块:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix} \\
&= \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_n\beta_n^T
\end{aligned}
$$

再探矩阵的乘法

- 观点 3：A 列分块，B 行分块:

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{pmatrix}$$
$$= \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T + \cdots + \alpha_n\beta_n^T$$

- 例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

线性方程组 $AX=\beta$ 的向量表示方法

将 A 列分块，X 行分块，则

$$
\begin{aligned}
AX &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta
\end{aligned}
$$

上式称为线性方程组的向量表达.

- $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ 称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一个线性组合.

- 列分块矩阵和行分块矩阵

$$\left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)$$

可分别记为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 和 $\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$.

- 分块对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 A 为 n 阶方阵，$A_1,\cdots,A_s$ 皆为方阵，其余位置为 0 矩阵.

-

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵的行列式和逆矩阵

- $$\begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$
- A 可逆当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 可逆，且

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

练习

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$, A^2 和 A^{-1}.

例

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

求 $|A^5|$, A^2 和 A^{-1}.

Answer: $|A^5| = 8^5$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2.5. 矩阵的初等变换

- 矩阵的三种初等行变换
  - 交换两行；$r_i \leftrightarrow r_j$
  - 某行乘以非零数 k；$r_i \times k$
  - 某行加上另外一行的 k 倍：$r_i + kr_j$

- 矩阵的三种初等行变换
  - 交换两行：$r_i \leftrightarrow r_j$
  - 某行乘以非零数 k：$r_i \times k$
  - 某行加上另外一行的 k 倍：$r_i + kr_j$
- 类似，可以定义矩阵的初等列变换：$c_i \leftrightarrow c_j$，$c_i \times k$，$c_i + kc_j$.

  ⋆ 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

- 矩阵的三种初等行变换
    - 交换两行：$r_i \leftrightarrow r_j$
    - 某行乘以非零数 k：$r_i \times k$
    - 某行加上另外一行的 k 倍：$r_i + kr_j$
- 类似，可以定义矩阵的初等列变换：$c_i \leftrightarrow c_j$，$c_i \times k$，$c_i + kc_j$.

  ⋆ 初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

- 三种初等变换都是可逆的，且逆变换是相同类型的变换.
  - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
  - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
  - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \arrow[r, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \arrow[d, shift right, "c_2 \times \frac{1}{2}"'] \arrow[dr, shift right, "r_2 - 2r_1"'] & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \arrow[l, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \arrow[u, shift right, "c_2 \times 2"'] & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \arrow[ul, shift right, "r_2 + 2r_1"']
\end{tikzcd}
$$

矩阵的初等变换

- 三种初等变换都是可逆的，且逆变换是相同类型的变换.
  - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
  - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
  - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \arrow[rr, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \arrow[d, shift right, "c_2 \times \frac{1}{2}"'] \arrow[drr, shift right, "r_2 - 2r_1"'] & & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \arrow[ll, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \arrow[u, shift right, "c_2 \times 2"'] & & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \arrow[ull, shift right, "r_2 + 2r_1"']
\end{tikzcd}
$$

矩阵的初等变换

- 三种初等变换都是可逆的，且逆变换是相同类型的变换.
  - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
  - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
  - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

$$
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&, column sep=huge, row sep=huge]
\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \arrow[r, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \arrow[d, shift right, "c_2 \times \frac{1}{2}"'] \arrow[dr, shift right, "r_2 - 2r_1"'] \& \begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix} \arrow[l, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \\
\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix} \arrow[u, shift right, "c_2 \times 2"'] \& \begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix} \arrow[ul, shift right, "r_2 + 2r_1"']
\end{tikzcd}
$$

矩阵的初等变换

- 三种初等变换都是可逆的，且逆变换是相同类型的变换.
  - $r_i \leftrightarrow r_j \Rightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
  - $r_i \times k \Rightarrow r_i \times \frac{1}{k}$;
  - $r_i + kr_j \Rightarrow r_i - kr_j$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \arrow[r, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \arrow[d, shift right, "c_2 \times \frac{1}{2}"'] \arrow[dr, shift right, "r_2 - 2r_1"'] & \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} \arrow[l, shift left, "r_1 \leftrightarrow r_2"] \\
\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \arrow[u, shift right, "c_2 \times 2"'] & \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \arrow[ul, shift right, "r_2 + 2r_1"']
\end{tikzcd}$$

矩阵的等价

- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

矩阵的等价

- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题:

- 在相互（行/列）等价的矩阵中，什么矩阵简单?
- 等价的矩阵有什么共性?
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题:

- 在相互（行/列）等价的矩阵中，什么矩阵简单?
  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性?
- 对矩阵进行初等变换有什么用处?

矩阵的等价

- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题：

- 在相互（行/列）等价的矩阵中，什么矩阵简单？
  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性？
  $\Rightarrow$ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处？

- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
- 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

自然的问题：

- 在相互（行/列）等价的矩阵中，什么矩阵简单？

  $\Rightarrow$ 行阶梯形矩阵、行最简形矩阵、标准形矩阵.
- 等价的矩阵有什么共性？

  $\Rightarrow$ 矩阵的秩.
- 对矩阵进行初等变换有什么用处？

  $\Rightarrow$ 判断/求线性方程组的解. **(Chap-3)**

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\1 & 1 & 1 & 2\\2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2 & 2\\0 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\0 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注：矩阵之间的变换用箭头或者 $\sim$ 表示；行列式的变换用等号.

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

注：矩阵之间的变换用箭头或者 $\frown$ 表示；行列式的变换用等号.

- 通过初等变换，矩阵下方的 0 不断变多.

利用初等行变换化简下面矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注：矩阵之间的变换用箭头或者 $\sim$ 表示；行列式的变换用等号.

- 通过初等变换，矩阵下方的 0 不断变多.
- 后三个矩阵下方的零构成一个阶梯形状.

行阶梯形矩阵、行最简形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵、行最简形矩阵

- 行阶梯形矩阵：
  - 可画出一条阶梯线，线的下方全是 0；
  - 每个台阶只有一行；
  - 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行最简形矩阵：
  - 行阶梯形；
  - 非零行的首个非零元为1;
  - 这些1所在的列其他元素都为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 标准形矩阵:

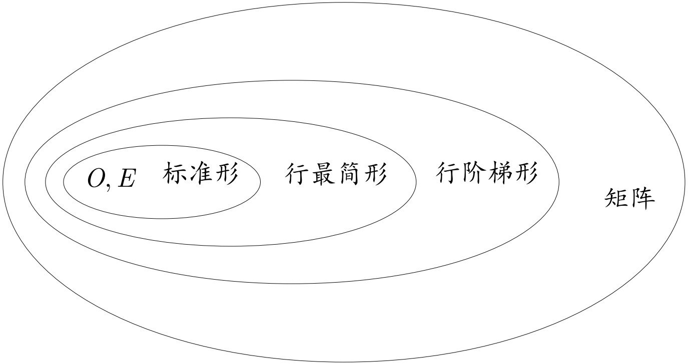
$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形矩阵

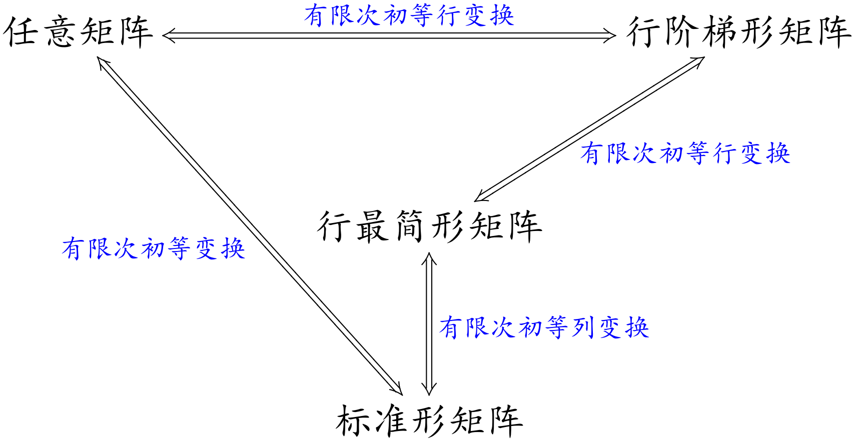
- 标准形矩阵:

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

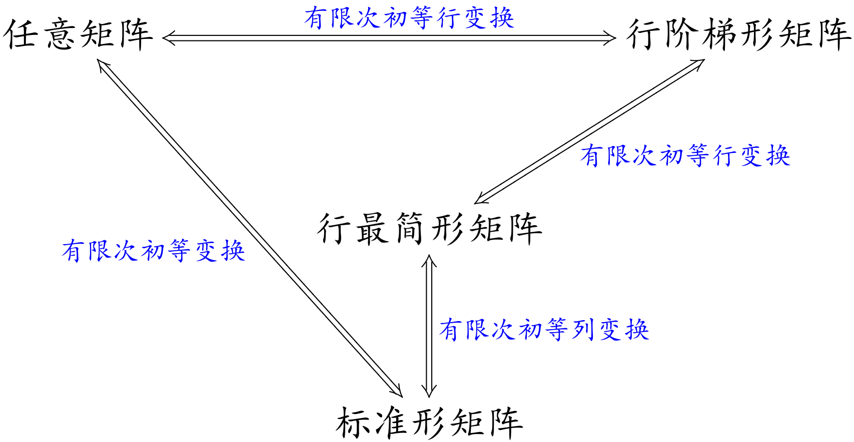
- 行阶梯形矩阵 $\supset$ 行最简形矩阵 $\supset$ 标准形矩阵.



定理


任意矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

定理



- 矩阵的行阶梯形不唯一，但行最简形和标准形唯一.
- 行最简形是行等价矩阵中最简单的矩阵，标准形是等价矩阵中最简单的矩阵.

例

利用初等行变换将 A 依次化为行阶梯形、行最简形; 再利用初等列变换化为标准形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

小结

1、 矩阵分块和分块矩阵

2、 矩阵的初等变换和等价

第 4 周作业

- Page$_{73-74}$: 2, 3, 4
- 已知矩阵
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
求 $|A^8|$, A^4 和 A^{-1}.
- Page$_{83}$: 2-(4), 4-(2), 5, 6, 8

数学中的等价关系

- 集合上的等价关系，记为 $A \sim B$，是指满足以下三个条件的二元关系：
  - 自反性： $A \sim A$;
  - 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;
  - 传递性：若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$.
- 数的相等，三角形的相似和全等，直线的平行都是等价关系.
- 线性代数的等价关系：
  - 矩阵的等价，Chap-2;
  - 向量组的等价，Chap-4;
  - 方阵的相似，Chap-5;
  - 实对称矩阵的合同和正交相似，Chap-6.

等价关系

- 集合上的等价关系实际上是对集合中元素分类. 比如整数集合上定义
$$x \sim y \Leftrightarrow 2|x-y.$$
则这个等价关系把整数集分为偶数和奇数两类.
- 相互等价的元素看为一个整体，称为一个等价类, 记为 $[x]$.
- 彼此等价的元素所具有的共性和相同的数量特征被称为等价关系下的不变性和不变量. 进一步，若不变性或不变量可以反过来刻画两个元素是否等价，则称为完全不变性或完全不变量. 例如，所有的偶数都可以被 2 整除，所有的奇数都不可以被 2 整除. 是否被 2 整除这一特性是上面等价关系的一个完全不变性.
- 本门课中的秩、特征值、正负惯性指数都是重要的不变量.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 22 日