线性代数-8

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 20 日

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行，$r_i \leftrightarrow r_j$;

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行，$r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍，$r_i \times k$;

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行, $r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍, $r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍, $r_i + kr_j$.

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行，$r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍，$r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍，$r_i + kr_j$.
- 矩阵的等价:

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行，$r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍，$r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍，$r_i + kr_j$.
- 矩阵的等价：
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价，记为 $A \overset{r}{\sim} B$;

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行, $r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍, $r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍, $r_i + kr_j$.
- 矩阵的等价：
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行, $r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍, $r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍, $r_i + kr_j$.
- 矩阵的等价:
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.

回顾：矩阵的初等变换和等价

- 矩阵的三种初等行变换:
  - 交换两行, $r_i \leftrightarrow r_j$;
  - 某一行乘非零常数倍, $r_i \times k$;
  - 某行加上另外一行的 k 倍, $r_i + kr_j$.
- 矩阵的等价：
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, 则称 A, B 行等价, 记为 $A \overset{r}{\sim} B$;
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$, 则称 A, B 列等价, 记为 $A \overset{c}{\sim} B$;
  - 若 $A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} B$, 则称 A, B 等价, 记为 $A \sim B$.
- 任意矩阵 $A \xrightarrow{\mathbf{r}}$ 行阶梯形 $\xrightarrow{\mathbf{r}}$ 行最简形 $\xrightarrow{\mathbf{c}}$ 标准形.

本次课内容

1. 初等变换和初等矩阵–左行右列

2. 初等变换的应用

A, B 都为 $m \times n$ 矩阵，则

- $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$;
- $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$;
- $A \sim B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行 \& 列变换}} B$;

初等变换和矩阵乘法–左行右列

A, B 都为 $m \times n$ 矩阵，则

- $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B;$
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $PA = B;$
- $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B;$
- $A \sim B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行 \& 列变换}} B;$

初等变换和矩阵乘法–左行右列

A, B 都为 $m \times n$ 矩阵，则

- $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$;
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $PA = B$;
- $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$;
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 Q, 使得 $AQ = B$;
- $A \sim B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行 \& 列变换}} B$;

初等变换和矩阵乘法–左行右列

A, B 都为 $m \times n$ 矩阵，则

- $A \overset{r}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$;
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $PA = B$;
- $A \overset{c}{\sim} B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} B$;
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 Q, 使得 $AQ = B$;
- $A \sim B \Longleftrightarrow A \xrightarrow{\text{有限次初等行 \& 列变换}} B$;
  $\Longleftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得

$$PAQ = B.$$

- 将单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵 (Elementary Matrix).

初等变换和初等矩阵

- 将单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵 (Elementary Matrix).
- 三种初等行变换和三种初等列变换:
  - $r_i \leftrightarrow r_j$, $c_i \leftrightarrow c_j$;
  - $r_i \times k$, $c_i \times k$ $(k \neq 0)$;
  - $r_i + kr_j$, $c_i + kc_j$.

$r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $E(i,j)$

- 交换单位阵 E 的第 i,j 行 (列)，记为 $E(i,j)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(1,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_3]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(1,3)$$

$r_i \times k$ 和 $E(i(k))$

- 单位阵 E 的第 i 行 (列) 乘非 0 常数 k，记为 $E(i(k))$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(2(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 \times k]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(2(k))$$

$r_i + kr_j$ 和 $E(ij(k))$

- 单位阵 E 的第i行加上第j行的 k 倍，记为 $E(ij(k))$. 或单位阵 E 的第j列加上第i列的 k 倍，记为 $E(ij(k))$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+kr_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(31(k))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+kc_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E(31(k))$$

- A 左边乘初等矩阵 $\Leftrightarrow$ 对 A 进行相应初等行变换.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

- A 右边乘初等矩阵 $\Leftrightarrow$ 对 A 进行相应初等列变换.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$$

初等变换和初等矩阵

- $E_m(i,j) \cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i \leftrightarrow r_j;$
- $A_{m\times n} \cdot E_n(i,j) \Leftrightarrow c_i \leftrightarrow c_j;$

- $E_m(i(k)) \cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i \times k;$
- $A_{m\times n} \cdot E_n(i(k)) \Leftrightarrow c_i \times k;$

- $E_m(ij(k)) \cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i + kr_j;$
- $A_{m\times n} \cdot E_n(ij(k)) \Leftrightarrow$

初等变换和初等矩阵

- $E_m(i,j)\cdot A_{m\times n}\Leftrightarrow r_i\leftrightarrow r_j$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(i,j)\Leftrightarrow c_i\leftrightarrow c_j$;

- $E_m(i(k))\cdot A_{m\times n}\Leftrightarrow r_i\times k$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(i(k))\Leftrightarrow c_i\times k$;

- $E_m(ij(k))\cdot A_{m\times n}\Leftrightarrow r_i+kr_j$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(ij(k))\Leftrightarrow c_j+kc_i$.

- $E_m(i,j)\cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i \leftrightarrow r_j$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(i,j) \Leftrightarrow c_i \leftrightarrow c_j$;

- $E_m(i(k))\cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i \times k$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(i(k)) \Leftrightarrow c_i \times k$;

- $E_m(ij(k))\cdot A_{m\times n} \Leftrightarrow r_i + kr_j$;
- $A_{m\times n}\cdot E_n(ij(k)) \Leftrightarrow c_j + kc_i$.

性质 (左行右列)

矩阵 $A_{m\times n}$ 进行一次初等行变换，相当于左边乘一个 m 阶初等矩阵；
矩阵 $A_{m\times n}$ 进行一次初等列变换，相当于右边乘一个 n 阶初等矩阵.

- 初等矩阵的逆矩阵对应初等变换的逆变换：
  - $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$;
  - $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$;
  - $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

性质

方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$, 使得

$$A=P_1P_2\cdots P_l.$$

- 初等矩阵的逆矩阵对应初等变换的逆变换：
  - $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$;
  - $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$;
  - $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$.

性质

方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使得

$$A = P_1 P_2 \cdots P_l.$$

- 可逆矩阵 A 的行最简形、列最简形、标准形都是单位阵.
- 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E \Leftrightarrow A \overset{c}{\sim} E \Leftrightarrow A \sim E$.

定理 (左行右列)

A, B 都为 $m \times n$ 矩阵，则

- $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P, 使 $PA = B$;
- $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在 n 阶可逆矩阵 Q, 使 $AQ = B$;
- $A \sim B$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使

$$PAQ = B.$$

初等变换的应用 1

- 应用 1：已知矩阵 A, B 行等价，求可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.

- 应用 1：已知矩阵 A, B 行等价，求可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots P) = (B \vdots P)$$

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (B \vdots P)$$

- 应用 1：已知矩阵 A, B 行等价，求可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots P) = (B \vdots P)$$

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (B \vdots P)$$

- 思路：对 $(A \vdots E)$ 作初等行变换，把 A 变为 B，则单位阵 E 记录了相应初等行变换化为可逆矩阵 P.

例子

例

设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵为 F, 求 F. 并求一个可逆矩阵 P, 使得 $PA=F$.

例子

例

设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵为 F, 求 F. 并求一个可逆矩阵 P, 使得 $PA=F$.

- 这里的 P 不唯一. (A 可逆时，P 唯一.)

初等变换的应用 2

- 应用 2：判断方阵 A 是否可逆并求逆矩阵. 即 $PA = E$ 是否能求出可逆 P.

初等变换的应用 2

- 应用 2：判断方阵 A 是否可逆并求逆矩阵. 即 $PA = E$ 是否能求出可逆 P.

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots P) = (E \vdots P = A^{-1})$$

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

初等变换的应用 2

- 应用 2：判断方阵 A 是否可逆并求逆矩阵. 即 $PA = E$ 是否能求出可逆 P.

$$P(A \vdots E) = (PA \vdots P) = (E \vdots P = A^{-1})$$

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

- 思路：方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$. 对 $(A \vdots E)$ 作初等行变换，把 A 变为 E，则 $(A \vdots E)$ 中的单位阵 E 记录了相应初等行变换化为 A^{-1}.
- 注：也可

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{有限次初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1}. \end{pmatrix}$$

例子

例

设 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\3&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$, 证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

初等变换的应用 3

- 应用 3: 求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.
  (更一般地，解矩阵方程 $AX = B$ 和 $XA = B$.)

初等变换的应用 3

- 应用 3: 求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.
(更一般地，解矩阵方程 $AX = B$ 和 $XA = B$.)

$$P(A \vdots B) = (PA \vdots PB) = (E \vdots A^{-1}B)$$

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$$

- 应用 3: 求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.
  (更一般地，解矩阵方程 $AX=B$ 和 $XA=B$.)

$$P(A \vdots B) = (PA \vdots PB) = (E \vdots A^{-1}B)$$

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$$

- 思路：方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$. 对 $(A \vdots B)$ 作初等行变换，把 A 变为 E，则 B 记录了相应初等行变换化为 $A^{-1}B$.

- 应用 3: 求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.
(更一般地，解矩阵方程 $AX=B$ 和 $XA=B$.)

$$P(A \vdots B) = (PA \vdots PB) = (E \vdots A^{-1}B)$$

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$$

- 思路：方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} E$. 对 $(A \vdots B)$ 作初等行变换，把 A 变为 E，则 B 记录了相应初等行变换化为 $A^{-1}B$.
- 注：$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{有限次初等列变换}]{} \begin{pmatrix} E \\ BA^{-1} \end{pmatrix}$ 求 BA^{-1}.

初等变换的应用 3

- 应用 3: 求 $A^{-1}B$ 和 BA^{-1}.
  (更一般地，解矩阵方程 $AX=B$ 和 $XA=B$.)

$$P(A\,\vdots\,B)=(PA\,\vdots\,PB)=(E\,\vdots\,A^{-1}B)$$

$$(A\,\vdots\,B)\xrightarrow{\text{有限次初等行变换}}(E\,\vdots\,A^{-1}B)$$

- 思路：方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A\overset{r}{\sim}E$. 对 $(A\,\vdots\,B)$ 作初等行变换，把 A 变为 E，则 B 记录了相应初等行变换化为 $A^{-1}B$.
- 注：一般 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}^T\xrightarrow{\text{有限次初等行变换}}\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}^T$ 求 BA^{-1}.

例

求解矩阵方程 $AX = B$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

小结

1、 初等矩阵和初等变换：左行右列刻画矩阵的等价；

2、 初等变换的应用.

- 求 A^{-1};
- 解矩阵方程 $AX = B$ 和 $XA = B$.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2025 年 9 月 20 日