6-4. 证法一. 降阶法.

证法二: 考虑

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

Vandermonde 行列式

$$= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot(d-a)(d-b)(d-c)\cdot(c-a)(c-b)\cdot(b-a). \quad (*)$$

$$\overset{\text{展开}}{=} 1\cdot A_{15} + x\cdot A_{25} + x^2\cdot A_{35} + x^3\cdot A_{45} + x^4\cdot A_{55} \quad (**)$$

注意到

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = M_{45}$$

与 x^3 的系数有关, 比较 * 和 ** 中 x^3 的系数, 得

$$A_{45} = (-a-b-c-d)\cdot(d-a)(d-b)(d-c)\cdot(c-a)(c-b)\cdot(b-a)$$

而 $A_{45} = (-1)^{4+5}M_{45} = -D$

$\therefore D = -A_{45} = (a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$ 口

8-3. 解: 通过 $r_{n+1} \leftrightarrow r_n, r_n \leftrightarrow r_{n-1} \cdots r_2 \leftrightarrow r_1$, 可将 r_{n+1} 换到第一行.
再通过 $r_{n+1} \leftrightarrow r_n \cdots\cdots r_3 \leftrightarrow r_2$, 可将 r_{n+1} 换到第二行

...

$$\therefore D_{n+1} = (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$x_1 = a$
$x_2 = a-1$
$\vdots$
$x_{n+1} = a-n$
$\therefore x_i = a+1-i$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geq i>j\geq 1} [(a+1-i)-(a+1-j)]$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geq i>j\geq 1} (-i+j) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(i-j) = \prod_{n+1\geq i>j\geq 1}(i-j)$$

注意：$\prod$ 下的指标为 $i>j$，而不是 $i\geq j$ ☆☆.

8-6. 解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_2-r_1}]{\substack{r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2}}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2+c_n \\ \cdots \\ c_{n-1}+c_n}]{c_1+c_n}\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)(-2)^{n-2}\cdot(-1)$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\cdot 2^{n-2}$$

注意答案不是 $(-1)^{n-1}(n-1)^{2n-2}$，尽量不抄作业!!

9. 解：~~将~~ D的第三行换为 $(1,3,-2,2)$，然后求行列式.

参考 P_{20} 例13.