专业姓名学号：共 6 小题，做对 4+ A⁺，4 A，3 B，2 C，1 D.

1. 判断题（正确请说明理由，错误请说明理由或给出反例）：

（1）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

（2）$A_{m\times n}X_n = A_{m\times n}Y_n$，若 A 列满秩，则 $X = Y$.

(1) 错误.

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$AB + BA = 2AB$ 当且仅当 $AB = BA$ 时才成立.

(2) 正确.

证1：$AX = AY$

$\therefore A(X-Y) = 0$

A 列满秩，有左消去律（见书）

$\therefore X - Y = 0$

$\therefore X = Y$

证2：A 列满秩，则 $A \sim \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ ∃可逆 P, s.t. $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = P^{-1}\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 由 $AX = AY$ 知

$P^{-1}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}X = P^{-1}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}Y$

两边同乘 P，得

$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}Y \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = Y.$

2. 计算题：

（1）求 A^6, 其中

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

解：令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B^3 = 0$.

$A = \lambda E + B$

$\therefore A^6 = (\lambda E + B)^6$

$= \lambda^6 E + C_6^1 \lambda^5 B + C_6^2 \lambda^4 B^2 + 0$

$= \begin{pmatrix} \lambda^6 & C_6^1\lambda^5 & C_6^2\lambda^4 \\ 0 & \lambda^6 & C_6^1\lambda^5 \\ 0 & 0 & \lambda^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^6 & 6\lambda^5 & 15\lambda^4 \\ 0 & \lambda^6 & 6\lambda^5 \\ 0 & 0 & \lambda^6 \end{pmatrix}$ ☑

（2）用初等变换的方法求解矩阵方程 $AX = B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}.$$

解：

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-3\\0&0&5&0&8\\0&-2&5&0&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\times(-\frac{1}{2})\\ r_3\times\frac{1}{5}}]{\substack{r_3-r_2\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&\frac{8}{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{1}{5}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

$\because$ $R(A)=R(A,B)=3$. A可逆，矩阵方程有唯一解

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}\\0&0\\0&\frac{8}{5}\end{pmatrix}. \quad \square$$

3.（选做）设 A 为 n 阶方阵，$R(A)=1$, 证明：

1) 存在非零列向量 α,β 使得 $A=\alpha\beta^T$;

2) $A^{n+1}=k^nA$, 其中 $k=\alpha^T\beta$.

1). 证明：$R(A)=1$,

$\therefore A\sim\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$ 标准形

即$\exists$可逆 P, Q. s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore A=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdot(1,0,\cdots,0)Q^{-1}$$

令 $\alpha=P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\beta^T=(1,0,\cdots,0)Q^{-1}$

则 α,β 非零.（α为P^{-1}的第1列. β^T为Q^{-1}的第一行）

$A=\alpha\beta^T$

证2: $R(A)=1$,

$\therefore A\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,（行最简形）

即$\exists$可逆P, s.t.

$$PA=\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

$$\therefore A=P^{-1}\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

对P^{-1}列分块, $P^{-1}=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 则

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=(\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\alpha\beta^T$$

α,β 为非零列向量

证3：$R(A)=1$，

根据定义知 A的任意两行(列)成比例，

不妨设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1\neq 0$。

则设 $\alpha_2=k_2\alpha_1,\cdots,\alpha_n=k_n\alpha_n$。

$\therefore A=(\alpha_1,k_1\alpha_1,\cdots,k_n\alpha_n)$

$=\alpha_1\cdot(1,k_1,\cdots,k_n)$

令 $\beta^T=(1,k_1,\cdots,k_n)$

则 $A=\alpha\cdot\beta^T$。

(2). 由第一问知

$A^{n+1}=(\alpha\beta^T)^{n+1}$

$=\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T$

$=\alpha\cdot(\beta^T\alpha)^n\cdot\beta^T$

$=\alpha\cdot k^n\beta^T$

$=k^n\alpha\beta^T$

$=k^nA$ ▯

第五周作业除第20题外，问题不大。
注意初等变换的规范性。

20题：证："$\Rightarrow$" 见上面3种证法

"$\Leftarrow$" 即证 $R(\alpha\beta^T)=1$

设 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\neq 0$ $\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\neq 0$

则 $\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}(y_1\cdots y_n)$

$=\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{pmatrix}$

不妨设 $x_1\neq 0$，

$\xrightarrow[r_n-\frac{x_n}{x_1}r_1]{r_2-\frac{x_2}{x_1}r_1,\ \vdots}\begin{pmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{x_1}}\begin{pmatrix}\beta^T\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

$\therefore R(\alpha\beta^T)=R(\beta^T)=1$。

证2：$R(\alpha\beta^T)\leq\min\{R(\alpha),R(\beta)\}=1$

$\therefore R(\alpha\beta^T)=0$ 或 1。

若 $R(\alpha\beta^T)=0$，则 $\alpha\beta^T=0$。

α 可看为列满秩，故 $\beta^T=0$ 矛盾。

$\therefore R(\alpha\beta^T)=1$。 #