2、向量组 A.B 等价 $\begin{cases} \text{定义：A.B 可相互线性表示.} \\ \text{充要条件：} R_A = R_B = R(A,B) \end{cases}$

用定义证计算量大，故本题只需证 $R_A = R_B = R(A,B)$

为求 R_A，R_B 和 $R(A,B)$ 需用初等行变换化为行阶梯形或行最简形

对 A.B 同时初等变换即

$$(A,B) = (a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because$ $R_A = R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$ 前两列的秩

$R_B = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 2.$ 后三列的秩.

这里判断 R_B 有很多方法：

法1. 存在 2 阶非零子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，且 $R_B \leq 2$.

$\therefore$ $R(B) = 2$

法2：$R_B \leq 2$，则 $R_B = 0, 1, 2.$

$B \neq 0$ 故 $R_B \neq 0.$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 非零行不成比例，故 $R_B \neq 1.$

$\therefore$ $R_B = 2$.

$\therefore$ $R_A = R_B = R(A,B) = 2.$

$\therefore$ 向量组 A. B 等价.

9. 证1: 设 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4=0$.

则 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4$

$$=x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_4)+x_4(a_4+a_1)$$

$$=(x_1+x_4)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3+(x_3+x_4)a_4.$$

令 $x_1+x_4=x_1+x_2=x_2+x_3=x_3+x_4=0$, 则 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4=0$.

解得 $x_1=-x_4=-x_2=x_3$.

令 $x_1=1$, 则 $b_1-b_2+b_3-b_4=0$.

故 b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关.

证2: $(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow R_B<4 \Rightarrow b_1,b_2,b_3,b_4$ 线性相关.

12. 证1: 设 $K=(X_1,\cdots,X_r)$

则 $b_i=(\alpha_1,\cdots\alpha_s)X_i$ (X_i为b_i在$\alpha_1,\cdots\alpha_s$下的坐标)

$\therefore$ $b_1\cdots b_r$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ $k_1b_1+\cdots+k_rb_r=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ $k_1(\alpha_1\cdots\alpha_s)X_1+\cdots+k_r(\alpha_1\cdots\alpha_s)X_r$

$=(\alpha_1,\cdots\alpha_s)[k_1X_1+\cdots+k_rX_r]=0$

$\because$ $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关

$\therefore$ $\Leftrightarrow$ $k_1X_1+\cdots+k_rX_r=0$ 只有零解.

$\Leftrightarrow$ $X_1\cdots X_r$ 线性无关,

即 K 列满秩. $R(K)=r$.

矩阵语言:

B 列满秩

$\Leftrightarrow$ $B\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $AK\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0$ 只有零解.

$\because$ A 列满秩

$\Leftrightarrow$ $K\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_r\end{pmatrix}=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ K 列满秩, 即 $R(K)=r$.

(同学们的作业也有用反证法、线性无关等方法,都很好!)

16、解1：（$R_C=3 \Rightarrow R_A=2$，$R_A=2$条件多余）

$R_A=2$，故 a_1,a_2 线性无关

$R_B=2$，故 a_1,a_2,a_3 线性相关

故 a_3 可由 a_1,a_2 唯一线性表示，设为

$a_3=k_1a_1+k_2a_2$.

$R_C=3$，故 a_1,a_2,a_4 线性无关

设 $x_1a_1+x_2a_2+x_3(2a_3-3a_4)=0$.

则 $x_1a_1+x_2a_2+x_3(2a_3-3a_4)$

$=x_1a_1+x_2a_2+x_3(2(k_1a_1+k_2a_2)-3a_4)$

$=(x_1+2k_1x_3)a_1+(x_2+2k_2x_3)a_2-3x_3a_4=0$

a_1,a_2,a_4 线性无关

$\therefore \begin{cases} x_1+2k_1x_3=0 \\ x_2+2k_2x_3=0 \\ -3x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=0 \\ x_2=0 \\ x_1=0 \end{cases}$

$\therefore$ 向量组D线性无关，$R_D=3$.

矩阵描述：

$(a_1,a_2,2a_3-3a_4)$

$=(a_1,a_2,a_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k_1 \\ 0 & 1 & 2k_2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore R_D=R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2k_1 \\ 0 & 1 & 2k_2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=3$

解2：$R_D=R(a_1,a_2,2a_3-3a_4)$

$(a_1,a_2,2a_3-3a_4)\xrightarrow{C_3-\frac{k_1}{2}C_1-\frac{k_2}{2}C_2}(a_1,a_2,-3a_4)$

$\xrightarrow{C_3\times(-\frac{1}{3})}(a_1,a_2,a_4)$

$\therefore R_D=R(a_1,a_2,a_4)=3$.