27-1.

解：
$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{r_1+r_2\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&0&1&2&-4\\0&1&-1&-2&9\\0&0&0&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{\substack{r_1+r_3\\r_2-r_3}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&-8\\0&1&-1&0&13\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=-8-x_3\\x_2=13+x_3\\x_4=2\end{cases}$$ 令 $x_3=0$，得一特解 $X=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$ （不唯一）

$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\\x_4=0\end{cases}$$ 令 $x_3=1$，得基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ （不唯一，但为 ξ 的C倍，$C\neq0$）

32.

1). 证：设 $k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$

$A(k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})$

$=k_0A\eta^*+k_1A\xi_1+\cdots+k_{n-r}A\xi_{n-r}$

$=k_0b=A(0)=0$

$\because b\neq0$，$\therefore k_0=0$

$\therefore k_0\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$

$\because \xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 线性无关

$\therefore k_1=\cdots=k_{n-r}=0$.

$\therefore \eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关.

1. 证2：反证，若 $\eta^*, \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 线性相关。 (证法不唯一)

$\because \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关，

$\therefore \eta^*$ 可由 $\xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 唯一线性表示。

设 $\eta^* = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$

则 $A\eta^* = A(c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}) = 0$.

$= b$ (矛盾)

$\therefore \eta^*, \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关。

2. 证1：$\eta^*, \xi_1 \cdots, \xi_{n-r}$ 与 $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 可相互线性表示

$\xi_i = (\eta^*+\xi_i) - \eta^*$

$\therefore \eta^*, \xi_1 \cdots \xi_{n-r}$ 与 $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots \eta^*+\xi_{n-r}$ 等价

$\therefore R(\eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots, \eta^*+\xi_{n-r}) = R(\eta^*, \xi_1 \cdots, \xi_{n-r}) = n-r+1$

$\therefore \eta^*, \eta^*+\xi_1 \cdots \eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。

证2：设 $k_0\eta^* + k_1(\eta^*+\xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r}) = 0$

$k_0\eta^* + k_1(\eta^*+\xi_1) + \cdots + k_{n-r}(\eta^*+\xi_{n-r})$

$= (k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta^* + k_1\xi_1 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$

由(1)知 $\eta^*, \xi_1 \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关，故

$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r} = k_1 = \cdots = k_{n-r} = 0$

$\therefore k_0 = 0$

$\therefore \eta^*, \eta^*+\xi_1, \cdots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关。

37. 设 $V_1=(a_1,a_2,a_3)X_1$

$V_2=(a_1,a_2,a_3)X_2$

则求矩阵方程

$(a_1,a_2,a_3)X=(V_1,V_2)$

$X=(X_1,X_2)$