1. 解：a_1, a_2, a_3 正交单位化后为

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 e_1, e_2, e_3 等价，则 α_4 可由 e_1, e_2, e_3 线性表示。

设 $\alpha_4 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

由于 e_1, e_2, e_3 为标准正交的

故 $x_1 = [\alpha_4, e_1] = \alpha_4^T \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2, -1, 0, 3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$x_2 = [\alpha_4, e_2] = \alpha_4^T e_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 0, 3)\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{15}}$

$x_3 = [\alpha_4, e_3] = \alpha_4^T \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(2, -1, 0, 3)\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix} = \frac{7}{\sqrt{35}}$

$\therefore \alpha_4 = \frac{5}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{8}{\sqrt{15}}e_2 + \frac{7}{\sqrt{35}}e_3$.

注：$AX = \beta$ 中 若 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为正交阵，

则 A 可逆，且 $X = A^{-1}\beta = A^T\beta = \begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta\\ \vdots \\ \alpha_n^T\beta\end{pmatrix}$

更一般地，若 A 列向量组正交，$AX=\beta$ 有解，

则求解 $AX=\beta$ 有更直接方法，即 $x_i = [\alpha_i, \beta] = \alpha_i^T\beta$

4. 证明：$H^T = (E - 2XX^T)^T = E - 2X^{T^T}X^T = E - 2XX^T = H$

$\therefore$ H对称，

$H^T H = H^2 = (E - 2XX^T)(E - 2XX^T)$

$= E - \underline{4XX^T} + 4X\underbrace{X^TX}_{1}X^T$

注这里不是4，XX^T为n阶方阵，X^TX才为数1.

$= E$

$\therefore$ H 对称正交阵。

② $(AB)^T = B^TA^T \neq A^TB^T$

5、证1：

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

记 $B=AK$.

a_1,a_2,a_3 单位正交向量组 $\Rightarrow$ A为正交阵. $A^TA=E$

K为正交阵. $K^TK=E$

$\because$ $B^T\cdot B=(AK)^T\cdot(AK)=K^TA^TAK=K^TK=E$

$\therefore$ B为正交阵，即 b_1,b_2,b_3 单位正交向量组.

证2：計算 $[b_1,b_2]=[b_1,b_3]=[b_2,b_3]=0$

$[b_1,b_1]=[b_2,b_2]=[b_3,b_3]=1$

知 b_1,b_2,b_3 单位正交.

注意：$[b_1,b_2]=b_1^T\cdot b_2$ （行向量·列向量）

$\neq b_1\cdot b_2$ （不可乘）.

b_1的长度用 $\|b_1\|$，而非 $|b_1|$，这里因为 $|\ |$ 在线性代数中表示行列式.

6. 注：关于$\lambda=-1$的所有特征向量为

$$c\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad c\neq0.$$

（特征向量要求非零）.

9. 证1: 设 $AX=\lambda X$,

则 $(A^2-3A+2E)X = A^2X-3AX+2X$

$= \lambda^2 X - 3\lambda X + 2X$

$= (\lambda^2-3\lambda+2)X = 0X = 0$

$\because X \neq \vec{0}$,

$\therefore \lambda^2-3\lambda+2=0$

$\therefore \lambda=1$ 或 2.

这里不能直接由 $(\lambda^2-3\lambda+2)X=0$ 得 $X=0$ 或 $\lambda^2-3\lambda+2=0$.

证2: 设 λ 为 A 的特征值

则 $\phi(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$ 为 $A^2-3A+2E$ (即0矩阵) 特征值.

0矩阵特征值全为0. 故 $\lambda^2-3\lambda+2=0$

$\therefore \lambda=1$ 或 2.

证3: $A^2-3A+2E=(A-2E)(A-E)=0$

$\therefore |A-2E|\cdot|A-E|=0$

$\therefore |A-2E|=0$ 或 $|A-E|=0$

$\therefore \lambda=1$ 或 2 为 A 的特征值. (这里还需证A无其他特征值)

假设 $\lambda=\lambda_0\neq 1, \lambda_0\neq 2$. 下证 λ_0 不为 A 的特征值.

则

$(A-\lambda_0 E)(A-(3-\lambda_0)E)$

$= A^2 - A(3-\lambda_0) - \lambda_0 A + (3\lambda_0-\lambda_0^2)E$

$= A^2-3A+(3\lambda_0-\lambda_0^2)E$

$= -2E+(3\lambda_0-\lambda_0^2)E$

$= -(\lambda_0^2-3\lambda_0+2)E$

(来自朱勇陶的证明).

$\because |A-\lambda_0E|\cdot|A-(3-\lambda_0)E| = |-(\lambda_0^2-3\lambda_0+2)E| \neq 0 \quad (\lambda_0 \neq 1,2)$

$\therefore |A-\lambda_0E| \neq 0.$

$\therefore \lambda=\lambda_0$ 不为A的特征值.

$\therefore$ A的特征值只能取1或2.

注：$f(A)=0$，则称$f(x)$为A的零化多项式.

本题说明A的特征值必为A零化多项式的根.

13. 解：$|A| = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = -6$

$A^* = |A|\cdot A^{-1} = -6A^{-1}$，

令 $\phi(\lambda) = -\frac{6}{\lambda}+3\lambda+2$

则 $\phi(1)=-1$，$\phi(2)=5$. $\phi(-3)=-5$ 为 $A^*+3A+2E=-6A^{-1}+3A+2E$ 的所有特征值

$\therefore |A^*+3A+2E| = -1\times5\times(-5)=25.$