相似变换矩阵 P 不唯一 $\Leftarrow$ 特征向量取法、排列不唯一

$\Uparrow$

齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)x=0$
的基础解系取法不唯一.

$\Downarrow$

正交变换矩阵不唯一,
（按我们前面取自由未知量/基础解系的规则
下的得到的矩阵往往是参考答案）

20. 解: $\begin{cases} |A|=|\Lambda| \\ trA=tr\Lambda \end{cases} \Rightarrow x, y.$

or. $\begin{cases} |A+4E|=0 \\ trA=tr\Lambda \end{cases} \Rightarrow x, y.$

25-2 解 A 为对称阵，故 A 可正交相似对角化.
即 $\exists$ 正交 P. s.t $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$ 为对角阵.

$\therefore \quad A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -1 & -2 \\ \lambda-5 & \lambda-2 & -2 \\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

$\therefore \lambda=-1,1,5$ 为 A 的3个特征值.

$\therefore \quad A=P\Lambda P^T=P\,\mathrm{diag}(-1,1,5)\cdot P^T$

$$\varphi(A)=\varphi(P\Lambda P^T)=P\cdot\varphi(\Lambda)\cdot P^T$$
$$=P\cdot\Lambda^8(\Lambda-E)(\Lambda-5E)\cdot P^T$$
$$=P\cdot\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5^8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&0&\\&&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&&\\&-4&\\&&0\end{pmatrix}P^T$$
$$=P\begin{pmatrix}12&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^T$$
$$\overset{\text{令}P=(p_1,p_2,p_3)}{=}(p_1,p_2,p_3)\begin{pmatrix}12&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_1^T\\p_2^T\\p_3^T\end{pmatrix}$$
$$=(12p_1,0,0)\begin{pmatrix}p_1^T\\p_2^T\\p_3^T\end{pmatrix}=12p_1\cdot p_1^T$$

其中p_1为$\lambda=-1$对应的单位特征向量.

由$(-E-A)x=0$.

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-2\\-1&-3&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&2\\3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\varphi(A)=12\,p_1\cdot p_1^T=12\times\frac16\times\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}(1,1,-2)=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$$

注:①A对称,可正交相似对角化,可用 $\varphi(A)=\varphi(P\Lambda P^{-1})=\varphi(P\Lambda P^T)$
$=P\varphi(\Lambda)P^{-1}=P\varphi(\Lambda)P^T$ 计算.
$\quad\quad\| $
$P\cdot\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\varphi(\lambda_3))P^T$

②A不对称,但可相似对角化时,
可用 $\varphi(A)=\varphi(P\Lambda P^{-1})$
$=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$
$=P\,\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\varphi(\lambda_3))\,P^{-1}$ 计算.

③当A不可对角化时,例 $A=P\begin{pmatrix}\lambda&&\\1&\lambda&\\&&\lambda\end{pmatrix}P^{-1}$,
则 $A^k=P\left(\lambda E+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^kP^{-1}$ 可用二项式展开计算.

31. 解：$f = x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$

$= (x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3)+3x_2^2+5x_3^2$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3 \quad +3x_2^2+5x_3^2$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2+\underline{2x_2^2+4x_2x_3}+x_3^2$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-2x_3^2+x_3^2$

$= (x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-x_3^2$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-2x_3 \\ y_2 = \sqrt{2}(x_2+x_3) \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1 = y_1-x_2+2x_3 = y_1-\frac{y_2}{\sqrt{2}}+y_3+2y_3 = y_1-\frac{y_2}{\sqrt{2}}+3y_3 \\ x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{2}}-x_3 = \frac{y_2}{\sqrt{2}}-y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 为所用变换。

变换矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f = y_1^2+y_2^2-y_3^2$ （注：这里不是 $f = y_1^2+2y_2^2-y_3^2$）。

33. 解：二次型 f 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\because -2<0$，$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11>0$，$|A| = -38<0$

$\therefore$ 由 (Hurowicz) 定理知，f 为负定二次型。

（注：不是负二次型）。