韦达定理

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

如果 $f(x)=0$ 有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（计重数）。可设

$$\begin{aligned}f(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\&=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\&=A[x^n-\sum_i x_i\times x^{n-1}+\sum_{i\neq j}x_ix_j\times x^{n-2}-\sum_{i_1,i_2,i_3\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\times x^{n-3}+\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-1}}\times x+(-1)^nx_1x_2\cdots x_n]\end{aligned}$$

对比 x^i 项的系数可得

$$\begin{cases}a_n=A\\a_{n-1}=-\sum_i x_i\times A\\a_{n-2}=\sum_{i\neq j}x_ix_j\times A\\a_{n-3}=-\sum_{i_1,i_2,i_3\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\times A\\\cdots\\a_1=(-1)^{n-1}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-1}}\times A\\a_0=(-1)^nx_1x_2\cdots x_n\times A\end{cases}$$

可得韦达定理

$$\begin{cases}\sum_i x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\\\sum_{i\neq j}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}\\\sum_{i_1,i_2,i_3\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\\\cdots\\\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\text{互异}}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}\\x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}\end{cases}$$