摄动法：

(1)、证明矩阵问题对可逆阵成立

(2) 对一般（未必可逆）矩阵 A，考虑 $xE+A$，

当 x 取一个充分大的数时，$xE+A$ 为严格对角占优，故可逆

故矩阵问题对 $xE+A$ 都成立，这里 x 为任意一个充分大的数。

(3) 若矩阵问题关于 x 连续，则可取 $x=0$，推出矩阵问题

为 A 成立。（这里 A 未必可逆）。

一般，矩阵问题对应两个多项式 $f(x)$、$g(x)$

$f(x)=g(x)$，当 x 充分大时成立。

根据第一章定理9，$n+1$ 个点确定一个 n 次多项式

推出对 $\forall x$，$f(x)=g(x)$，

$f \cdot g$ 为多项式函数，连续 $\Rightarrow f(0)=g(0)$，即证！

例：$(AB)^*=B^* \cdot A^*$

证明：当 A 和 B 都可逆时，

$$(AB)^* \cdot AB = |AB| \cdot E = |A| \cdot |B| E$$

$$= |A| \cdot B^* B$$

$$B^* \cdot |A| E \cdot B$$

$$= B^* \cdot (A^* A) \cdot B$$

$$= B^* A^* \cdot AB$$

A、B都可逆，故 $(AB)^* = B^* A^*$。

（或 $(AB)^* = \dfrac{(AB)^{-1}}{|AB|} = \dfrac{B^{-1} \cdot A^{-1}}{|AB|} = B^* \cdot A^*$）

对一般A、B，当 x 充分大时，$xE+A$、$xE+B$ 都严格对角占优，故可逆。

$\therefore [(xE+A)(xE+B)]^* = (xE+B)^* \cdot (xE+A)^*$

$\because$ 两边都为 n 阶方阵，且每个 (i,j) 元都为关于 x 的多项式

不妨设 $[(xE+A)(xE+B)]^*$ 的 (i,j) 元为 $f_{ij}(x)$，

$(xE+B)^*(xE+A)^*$ 的 (i,j) 元为 $g_{ij}(x)$

则当 x 充分大时，$f_{ij}(x) = g_{ij}(x)$

又因 $\partial f_{ij}, \partial g_{ij} \leq 2n$，

$\therefore f_{ij}(x) = g_{ij}(x)$ 对任意 x 都成立。

特别地，$f_{ij}(0) = g_{ij}(0)$

$\therefore$ 令 $x=0$，则得 $(AB)^* = B^* \cdot A^*$。

$\square$