22.

$f(x_0)=0 \iff x-x_0 \mid f(x)$

$\iff \exists q(x),\ s.t.\ f(x)=(x-x_0)q(x)$

$\iff (x-x_0, f(x)) = x-x_0$

$f(x_0)\neq 0 \iff x-x_0 \nmid f(x)$

$\iff f(x_0)=r(x_0)$，其中 $r(x)=f(x)-(x-x_0)q(x)$.

$\iff (x-x_0, f(x))=1$

证明：$\Rightarrow$ 若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的 k 重根.

则 $(x-x_0)^k \mid f(x)$，且 $(x-x_0)^{k+1} \nmid f(x)$

即 $\exists q(x)$, s.t

$$f(x)=(x-x_0)^k\cdot q(x)$$

其中 $q(x_0)\neq 0$ （即 $x-x_0 \nmid q(x)$）

由 Leibniz 公式知

$$f^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} C_i^j\,[(x-x_0)^k]^{(j)}\, q^{(i-j)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} C_i^j \cdot A_k^j\,(x-x_0)^{k-j}\, q^{(i-j)}(x)$$

$\therefore$ 当 $0 \le i < k$ 时. $k-j>0$

$f^{(j)}(x_0)=0$

当 $j=k$ 时

$f^{(k)}(x_0) = C_k^k \cdot A_k^k \cdot 1 \cdot q^{(k-k)}(x)$

$= q(x_0) \neq 0$

$\Leftarrow$ $f(x_0)=0$，知 $x-x_0 \mid f(x)$

可设 $f(x)=(x-x_0)\cdot q_1(x)$

$\therefore f'(x)= q_1(x)+(x-x_0)q_1'(x)$

则 $f'(x_0) = q_1(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_1(x)$

$\therefore$ 可设 $f(x)=(x-x_0)^2 \cdot q_2(x)$

由数学归纳，设 $f(x)=(x-x_0)^i q_i(x)$，$i \le k-1$

则 $f^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} C_i^j A_i^j (x-x_0)^{i-j} q_i^{(i-j)}(x)$

$\therefore f^{i}(x_0) = q_i(x_0)=0$

$\therefore x-x_0 \mid q_i(x)$

则可设 $f(x)=(x-x_0)^{i+1}q_{i+1}(x)$.

（这里 $q_i(x)=(x-x_0)\cdot q_{i+1}(x)$）

由归纳，可设 $f(x)=(x-x_0)^k q_k(x)$

而 $f^{(k)}(x_0)=q_k(x_0)\neq 0$

知 $x-x_0 \nmid q_k(x)$.

$\therefore (x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$

即 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个 k 重根 ▨

$\Leftarrow$ Taylor 展开：(by 郝冠程)

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k$$

ξ 在 x 和 x_0 之间.

$$=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\therefore (x-x_0)^k \mid f(x)$. $(x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$.

评：实际上这里 ξ 不是一个定值，ξ 依赖于 x，所以可将 ξ 视为 x 的一个函数．需证 $f^{(k)}(\xi)$ 为一个多项式函数，可用多项式理论

$\Leftarrow$ 但这种证明思路的确是可行的!!

$f(x)$ 为一个多项式函数，设 $\partial f(x)=n$，则 $f^{(k)}(x)=0$，$\forall k>n$，

故 $f(x)$ 的 Taylor 展开中只有有限项.

故可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0$$

（事实上，对比第4题，$\frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}$ 为 $f(x)$ 首项系数 a_n.）

$$=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=(x-x_0)^k\left(\underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}}\right)$$

$\therefore (x-x_0)^k \mid f(x)$.

$f^{(k)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow (x-x_0)^{k+1}\nmid f(x)$

$\therefore$ $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的一个 k 重根. □

一种不严谨的理解：

$$f(x)=(x-x_0)^k\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}\right)$$

$$=(x-x_0)^k\cdot\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$ ξ 在 x 与 x_0 之间.

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-k}.$$

$$f^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(x_0) + \frac{f^{(k+1)}}{A_{k+1}^{1}}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{A_n^{n-k}}(x-x_0)^{n-k}$$

似乎 $f^{(k)}(\xi)$ 是 x 的 $n-k$ 次多项式,

但可以确定的是 $f^{(k)}(\xi)$ 不是定值!

这里用余项不容易说清楚!!

26、单位根

$$x^n = 1 \Rightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k=1,\cdots,n$$

$$= e^{\frac{2k\pi}{n} i}$$

(欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)

注: $x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$x_k = x_1^k, \ \forall k=1,\cdots,n.$

$\overline{x_k} = x_{n-k}, \ \forall k=1,\cdots,n-1.$

$x_n = x_1^n = 1.$

思考下面说法是否正确?

$\forall p \in N^+$, 若 $(p,n)=1$, 则

$x_p, x_p^1, \cdots, x_p^n$ 遍历 $x^n=1$ 的所有单位根.

解:

在复数域 $\mathbb{C}$ 上

$$x^n-1=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)=\left\{\begin{array}{l}\prod_{k=1}^{n}(x-x_1^k) \\ (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})(x-1 \\ \prod_{k=1}^{n}\left(x-e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)\end{array}\right.$$

在实数域 $\mathbb{R}$ 上,

($\mathbb{R}[x]$ 中任意多项式可分解为至多二次的因式乘积)

若 n 为奇数, 则 $x^n=1$ 的 n 个单位根中

有 ...

有 $\frac{n-1}{2}$ 对共轭复根，和 $x=1$.

此时

$$x^n-1=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots\underset{x-\bar{x}_2}{\underset{\parallel}{(x-x_{n-2})}}\underset{x-\bar{x}_1}{\underset{\parallel}{(x-x_{n-1})}}\cdot(x-x_n)$$

$$=(x-x_1)(x-\bar{x}_1)\times(x-x_2)(x-\bar{x}_2)\times\cdots$$

$$\times(x-x_{\frac{n-1}{2}})(x-\bar{x}_{\frac{n-1}{2}})\times(x-1)$$

$$=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-(x_k+\bar{x}_k)x+x_k\bar{x}_k\right)\times(x-1)$$

$$=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1\right)$$

若 n 为偶数，则 $x^n=1$ 有 $\frac{n-2}{2}$ 对共轭复根

和 $x=\pm1$

此时

$$x^n-1=(x+1)(x-1)\prod^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1\right)$$

$k=1$

(1)

(2-1) 证明：

令 $h_i(x) \triangleq \dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \prod_{k\neq i} \dfrac{(x-a_k)}{(a_i-a_k)}$

则 $h_i(a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}, \quad \forall a_j$

令 $H(x) \triangleq \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$.

$$H(a_j) = \sum_{i=1}^{n} h_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1 \quad \forall a_j.$$

∵ $a_1 \cdots a_n$ 互不相同，$\partial H(x) = n-1$.

∴ $H(x) \equiv 1, \quad \forall x.$

一个至多 $n-1$ 次多项式

(n个点可以确定 [illegible]

见定理9，或 待定系数，用范德蒙德行列式)

2. $f(x) = F(x)q(x) + r(x)$, $\partial r < \partial F = n$

$\therefore f(a_j) = F(a_j) + q(a_j) + r(a_j)$

$= r(a_j)$, $\forall j = 1, \cdots, n$.

令 $g(x) = \sum_i \dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)} = \sum_i f(a_i)h_i(x)$

$\partial g \leq n-1$

$\therefore g(a_j) = \sum_i f(a_i)h_i(a_j)$

$= \sum_i f(a_i)\delta_{ij}$

$= f(a_j)$, $\forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore r(a_j) = g(a_j)$, $\forall j = 1, \cdots, n$

$\therefore\ r(x) \equiv g(x), \ \forall x.$ $\square$