对称矩阵，合同关系：

①合同不变性（在合同关系下不变的性质，即 A 和 C^TAC 共性）

答：秩、规范形，　对称性，正/负定性，……

② 合同不变量（在合同关系下不变的特征量，即 A 和 C^TAC 共量）

（数，多项式，矩阵，群，环，域……）

答：正/负惯性指数，符号差，秩，……

③ $y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ 的向量表示。

令 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T$，$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$

$y=\alpha^TX=X^T\alpha$

6. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差等于 0，或者秩等于 1.

证明："⇐"　$\begin{cases}p+q=2\\p-q=0\end{cases}\Rightarrow p=q=1$

① 若 $r=2$，符号差 $=0$，则 正惯性指数 $=$ 负惯性指数 $=1$.

$f(X)$ 的规范型为 $f(Y)=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$

$=(\alpha_1^T+\alpha_2^T)X\cdot(\alpha_1^T-\alpha_2^T)X$.

∃ 非退化线性替换 $X=CY$，

$f(X)\xrightarrow{X=CY}f(Y)$

则 $Y=C^{-1}X=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}X\Rightarrow y_i=\alpha_i^TX$

② 若 $r=1$， $f(X)=X^TAX$，则 $r(A)=1$，则 $A=\alpha\cdot\beta^T$.

$\therefore f(X)=X^T\alpha\beta^TX=X^T\alpha\cdot\beta^TX$.

"$\Rightarrow$" $f(X)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)\cdot(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$

$\triangleq X^T\alpha\cdot\beta^TX$ ， $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n-\{0\}$.

若 $\alpha=k\beta$，$k\neq0$，则 $\alpha\cdot\beta^T=k\cdot\beta\beta^T$ 为对称阵.

$\therefore r(f)=r(\alpha\cdot\beta^T)=1$

若 α,β 线性无关，则存在非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n \\ y_2=b_1x_1+\cdots+b_nx_n \\ y_3=\ ? \\ \vdots \\ y_n=\ ? \end{cases} \qquad y_i=\gamma_i^TX \qquad Y=CX. \qquad \begin{pmatrix} \alpha^T \\ \beta^T \\ \gamma_3^T \\ \vdots \\ \gamma_n^T \end{pmatrix}.$$

使得 $f(X)$ 合同 $f(Y)=y_1y_2$，合同 $f(Z)=z_1^2-z_2^2$.

$\therefore r(f)=2$，符号差为0.

□

1. 实对称阵 A 为正定的

$\Leftrightarrow$. $C^TAC=E$，正惯性指数 n，负 $=0$. 符号差 $=n$.

① .

$A=(C^{-1})^T\cdot(C^{-1})\triangleq D^T\cdot D$ ， D 可逆.

$\Leftrightarrow$. 所有顺序主子式全大于0

（特征值全正）.

正定矩阵的判定，见王老师课堂笔记。

8. t 取什么值时，下列二次型是正定的：

1) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

解：二次型对称阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A正定 iff 所有顺序主子式大于0

$$\begin{cases} 1>0 \\ \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1-t^2>0 \\ |A| = -5t^2-4t>0 \end{cases}$$

$\therefore -\frac{4}{5}<t<0$

(2)

$$B=\begin{pmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1>0 \\ \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4-t^2>0 \\ |B| = -t^2+30t-105>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2<t<2 \\ 15-2\sqrt{30}<t<15+2\sqrt{30} \end{cases}$$

$15-2\sqrt{30}>2$

$\therefore$ t 无解！

$\forall t$. $f(X)$ 都不是正定的。

10. 设 A 是实对称矩阵.证明:当实数 t 充分大之后,$tE+A$ 是正定矩阵.

11. 证明:如果 A 是正定矩阵,那么 A^{-1} 也是正定矩阵.

12. 设 A 为一个 n 阶实对称矩阵,且 $|A|<0$,证明:必存在 n 维实向量 $X\neq 0$,使 $X^TAX<0$. 变规范型

13. 如果 A,B 都是 n 阶正定矩阵,证明:$A+B$ 也是正定矩阵.

14. 证明:二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

10. 证法一: A 为实对称,则 $tE+A$ 也为实对称,$\forall t\in\mathbb{R}$

对 $\forall t > \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|+1$

$$\begin{pmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & t+a_{nn}^{kk} \end{pmatrix}$$

则 $\forall\ t+a_{ll} > \sum_{i=1}|a_{il}|+a_{ll}$

$\geq \sum_{i\neq l}|a_{il}|$, $\forall k=1,\cdots,n.$

$\therefore$ 此时 $tE+A$ 严格对角占优, $\Rightarrow |tE+A|>0$

严格对角占优的主子式也为严格对角占优的,故行列式大于0

$\therefore$ $tE+A$ 为正定阵. ▢

证法二、 $tE+A$ 为对称矩阵.

设 $tE+A$ 的 l 阶顺序主子式为

$$H_l(t)=\begin{vmatrix} t+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & t+a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & t+a_{ll} \end{vmatrix}$$

$= t^l+\sum a_{ii}\cdot t^{l-1}+\cdots+H_l(0)$ 为一个 l 次多项式,

$\therefore \exists\ t_l$ s.t. $\forall t>t_l$, $H_l(t)>0$

令 $t_0 = \max\{t_1, \cdots, t_n\} + 1$

则 $H_i(t) > 0$，$\forall i = 1, \cdots, n$，$\forall t > t_0$

$\therefore$ $tE + A$ 为正定阵.

11. 证明：如果 A 是正定矩阵，那么 A^{-1} 也是正定矩阵.

11. 证明：A 正定，则存在可逆阵 C，s.t. $A = C^T C$.

$\therefore$ $A^{-1} = (C^T C)^{-1} = C^{-1} \cdot (C^{-1})^T$ （对称的）

则 A^{-1} 也是正定的. $\boxed{\text{四}}$

12. 设 A 为一个 n 阶实对称矩阵，且 $|A| < 0$，证明：必存在 n 维实向量 $X \neq 0$，使 $X^T A X < 0$.

证明：反证. $\forall X \neq 0$，$X^T A X \geqslant 0$

$\therefore$ A 半正定

定理8 (-5) 补充9 $\rightarrow$ A 的任意主子式大于等于 0，与 $|A| < 0$ 矛盾. $\boxed{\text{四}}$

直接证明：$|A| < 0 \Rightarrow A$ 可逆，且合同于 $\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_{n-1}, -1)$，$d_i = \pm 1$，$\prod d_i = 1$

$\exists$ 可逆 C，s.t. $A = C^T \cdot \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_{n-1}, -1) \cdot C$

$\therefore$ $X^T A X = X^T C^T \cdot \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_{n-1}, -1) \cdot C X$.

令 $Y_0 = C X_0 = (0, 0, \cdots, 0, 1)^T$. 此时 $X_0 = C^{-1}(0, \cdots, 0, 1)^T$

则 $f(X_0) = f(Y_0) = 0 - 1 \cdot y_0^2 = -1 < 0$ $\boxed{\text{四}}$

13、简证： 对称性： $(A+B)^T=A+B$.

$$f(X)=X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX>0,\ \forall X\in\mathbb{R}^n-\{0\}$$

13. 如果 A,B 都是 n 阶正定矩阵，证明：$A+B$ 也是正定矩阵.

14. 证明：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

规范形.

15. 证明：$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的.

证法一. $f(x)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i>j}x_ix_j$

$$A=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

A的所有主子式都对角占优，故 ≥ 0.

$\therefore$ A半正定 □.

证法二：$f(X)=\sum_{i>j}(x_i-x_j)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(x_i-x_j)^2$

$\geq 0\quad\forall X$

$\therefore f(X)$半正定.

(证法三):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right)^2$$

$$\alpha^T \alpha \cdot \beta^T \beta \geq (\alpha^T \beta)^2$$

内积

$$(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta) \geq (\alpha,\beta)^2$$

16. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是一实二次型.已知有 n 维实向量 X_1,X_2,使

$$X_1^TAX_1>0,\quad X_2^TAX_2<0,$$

证明:必存在 n 维实向量 $X_0\neq 0$,使 $X_0^TAX_0=0$.

(多元连续函数的介值定理)

代数方法:规范形.

简证: $f(X)=X^TAX \xrightarrow{X=CY} \bar{f}(Y)=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_q^2$

$f(X_1)>0 \Rightarrow p>0$

$f(X_2)<0 \Rightarrow q>0$

令 $Y_0=(1,0,\cdots,0,\underset{p+1}{1},0,\cdots,0)$,

$\bar{f}(Y_0)=0$, $X_0=CY_0$.

则 $f(X_0)=X_0^TAX_0=Y_0^T\underline{C^TAC}\,Y_0=0$

3. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$，其中$l_i(i=1,2,\cdots,p+q)$是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一次齐次式．证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数$\leqslant p$，负惯性指数$\leqslant q$．

仿定理4 构造性证明：

证：设 $f(X)$ 规范形 $\xrightarrow{X=CY}$ $f(Y)=y_1^2+\cdots+y_{p'}^2-y_{p'+1}^2-\cdots-y_{p'+q'}^2$

反证，假设 $p'>p$，则

$$\begin{cases} l_1=0 \\ \cdots \\ l_p=0 \\ y_{p'+1}=0 \\ \vdots \\ y_n=0 \end{cases}$$

n个未知量 $x_1,\cdots,x_n$

$n-(p'-p)$ 个方程

$<n$.

有非零解，设为 X_*.

则 $f(X_*)=\underbrace{-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2}_{\leq 0}=\underbrace{y_1^2+\cdots+y_{p'}^2}_{>0}$

矛盾，故假设不成立 □

同样方法，可证 $q'\leq q$.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

是一对称矩阵，且 $|A_{11}|\neq 0$，证明：存在 $T=\begin{pmatrix} E & X \\ O & E \end{pmatrix}$，使

$$T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 表示一个阶数与 A_{22} 相同的矩阵.

~~对称~~分块矩阵的合同变换.

$-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$

$$\begin{pmatrix} A_{11\,n\times n} & A_{12\,n\times s} \\ A_{21\,s\times n} & A_{22\,s\times s} \end{pmatrix} \xrightarrow[c_2 - c_1 A_{11}^{-1}A_{21}^{T}]{r_2 - A_{21}A_{11}^{-1}r_1} \begin{pmatrix} A_{11} & \underbrace{A_{12}-A_{21}^{T}}_{=0} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \triangleq D$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \underbrace{A_{12}-A_{21}^{T}}_{=0} \\ A_{21}-A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^{T} \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

则 $T^{T}AT=D$

5. 设 A 是反称矩阵，证明：A 合同于矩阵

第二数学归纳法.

8. 证明：

1) 如果 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型；

2) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A| \leqslant a_{nn}H_{n-1},$$

这里 H_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式；

3) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

4) 如果 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 是实可逆矩阵，那么

$$|T|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

① 证明：

$$f(Y)=\begin{vmatrix} A & Y \\ Y^T & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_1A^{-1}Y} \begin{vmatrix} A & 0 \\ Y^T & -Y^TA^{-1}Y \end{vmatrix}$$

$$= -Y^TA^{-1}Y\cdot|A|$$

$A^T=A$，$\because$ A 正定，$\therefore$ $|A|>0$，$\forall Y\neq 0$，$Y^TA^{-1}Y>0$

$\therefore$ $\forall Y\neq 0$，$f(Y)<0$，$f(Y)$ 为负定的.

② $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1}+0 & \cdots & a_{n,n-1}+0 & 0+a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\triangleq \quad D + a_{nn} \cdot H_{n-1}$,

由① $D \leqslant 0$, $\therefore$ $|A| \leqslant a_{nn} H_{n-1}$,

③ 由递归

$$|A| \leqslant a_{nn} H_{n-1} \leqslant a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} H_{n-2} \leqslant \cdots \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

④ 注意到 $|T|^2 = |T^T \cdot T|$

T 可逆 $\Rightarrow T^T T$ 正定.

$T = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$, $\alpha_i = (t_{1i}, \cdots t_{ni})^T$

$$\therefore T^T \cdot T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n^T \alpha_n \end{pmatrix}$$

由③. $|T^T \cdot T| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^T \alpha_i$