Chapter 6. 域上的线性空间

* 线性空间的定义. 3,
* 维数与基 8 -3, -4.
* 过渡矩阵, 坐标变换. 9, 补2
* 子空间 (中10、11十). 12-18, 补4, 补5

Def. 线性空间: (V, P, +, ·) 满足 8条规则

域

加法
① 交换律
② 结合律
③ ∃|零元
④ ∃|负元

乘法
⑤ P中单位
⑥ 结合律

乘法关于加法的分配律
$$\begin{cases} (k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha & ⑦ \\ k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta & ⑧ \end{cases}$$

V是

性质非常好的代数结构，

— 环上的线性空间；模

— 不满足交换律，左/右零元，左右负元

常见的线性空间：

1. P^n，数域P上的n维向量空间.

2. $P[x]$ 一元多项式全体

3. $M_{m\times n}(P)$ 数域P上 $m\times n$ 矩阵全体

4. $C(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$上连续函数全体

$C^\infty(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$上光滑函数全体

同构

P^n

$\mathbb{R}[x]$ 是 $C(\mathbb{R})$ 线性子空间

十. 基（维数）

1 $\sin x$ $\sin 2x$ ……

$\cos x$ $\cos 2x$ ……

傅里叶级数

$1, x, x^2, \ldots\ldots$

幂级数

3. 检验下列集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

1) 次数等于 $n(n\geq 1)$ 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法；

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

3) 全体 n 阶实对称(反称，上三角形)矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法；

4) 平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法；

5) 全体实数的二元数列，对于如下定义的运算[1]：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\circ(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right);$$

6) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0};$$

7) 集合与加法同 6)，数量乘法定义为

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha};$$

8) 全体正实数 $\mathbf{R}^+$，加法与数量乘法定义为

$$a\oplus b=ab,\quad k\circ a=a^k.$$

8)解：$(\mathbb{R}^+,\mathbb{R},\oplus,\circ)$ 是线性空间，下对 $\forall\ a,b\in\mathbb{R}^+$，$k_1,k_2,k\in\mathbb{R}$ 验证8条规则：

① $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$

② $(a\oplus b)\oplus c=ab\oplus c=abc=a\oplus bc=a\oplus(b\oplus c)$

③ $a\oplus 1=a\cdot 1=a$

④ $a\oplus\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}=1$

⑤ $1\circ a=a^1=a$

⑥ $k_1\circ(k_2\circ a)=k_1\circ a^{k_2}=(a^{k_2})^{k_1}=a^{k_1k_2}=k_1k_2\circ a$

⑦ $k\circ(a\oplus b)=k\circ ab=(ab)^k=a^kb^k=a^k\oplus b^k=(k\circ a)\oplus(k\circ b)$

⑧ $(k_1+k_2)\circ a=a^{k_1+k_2}=a^{k_1}\cdot a^{k_2}=a^{k_1}\oplus a^{k_2}=(k_1\circ a)\oplus(k_2\circ a)$

11. 证明：实数域作为它自身上的线性空间与第3题8)中的空间同构.

$$(\mathbb{R}^+,\mathbb{R},\oplus,\circ)\xrightarrow[\sigma]{\rho}(\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot)$$

8. 求下列线性空间的维数与一组基：

1）数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$；

2）$P^{n\times n}$ 中全体对称（反称、上三角形）矩阵作成的数域 P 上的空间；

3）第 3 题 8）中的空间；

4）实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\quad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}.$$

*基（维数）

3）解：$\forall$ 固定一个 $a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$，$\forall x\in\mathbb{R}^+$，$\exists k\in\mathbb{R}$. s.t.

$$k\circ a=a^k=x \quad (\forall a,x\in\mathbb{R}^+ \text{ 都线性相关})$$

$\because$ $\forall$ 正实数 $a\neq1$ 都是 $(\mathbb{R}^+,\mathbb{R},\oplus,\circ)$ 的一组基，维数 $=1$.

4）解：w 为 $x^3=1$ 的单位根，

$$A^3=\mathrm{diag}(1,w^3,w^6)=E,\quad A^2=\mathrm{diag}(1,w^2,w^4)=\mathrm{diag}(1,w^2,w)$$

$\therefore$ $\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]$

$$f(A)=k_0E+k_1A+k_2A^2$$

下证 E,A,A^2 线性无关，设

$$x_1E+x_2A+x_3A^2=0$$

即
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+wx_2+w^2x_3=0\\x_1+w^2x_2+wx_3=0\end{cases}$$

系数矩阵
$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&w^4\end{vmatrix}=(1-w)(1-w^2)(w^2-w)\neq0$$

Carmer 法则

$\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$.

$\therefore$ E,A,A^2 线性无关，

$\therefore$ E,A,A^2 为一组基。

4. 在线性空间中,证明:

1) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$;　　2) $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$.

5. 证明:在实函数空间中,1,$\cos^2 t$,$\cos 2t$ 是线性相关的.

6. 证明:如果 $f_1(x)$,$f_2(x)$,$f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式,但其中任意两个都不互素,那么它们线性无关.

7. 在 P^4 中,求向量 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标.设

1) $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$,　$\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$,　$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$,
$\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$,　$\xi=(1,2,1,1)$;

4、1 证明: $k0=k(\alpha+(-\alpha))=k\alpha+k\cdot(-\alpha)=k\alpha+(-k)\alpha=k\alpha+(-k\alpha)=0$

5、证: $\cos 2t=2\cos^2 t-1 \Rightarrow 1\cdot 1+(-2)\cdot\cos^2 t+1\cdot\cos 2t=0$

6、证明:设 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0$

反证、若 $k_1\neq 0$、则 $f_1=-\frac{k_2}{k_1}f_2-\frac{k_3}{k_1}f_3$,

设 $d=(f_2,f_3)$,其中 $\deg d>0$.

则 $d|f_2$. $d|f_3$. 知 $d|f_1$

$\therefore d\,|\,(f_1,f_2,f_3)$ 矛盾.

$\therefore$ 假设不成立,即 $k_1=0$

同理 $k_2=k_3=0$.

不妨假设 f_1,f_2,f_3 线性相关.
则 k_1,k_2,k_3 不全为0.
不妨设 $k_1\neq 0$.

矛盾.

$\therefore k_1=k_2=k_3=0$, $\Rightarrow f_1,f_2,f_3$ 线性无关.

□

※线性空间的基.

7. 解：$\xi = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

解线性方程组 $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

注：由于习惯上取向量为列向量

∴ 在描述基时，

<u>基一般放在左边.</u>

事实上，左右无所谓，但要区分

※过渡矩阵.

取线性空间 V 的两种基

Ⅰ：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

Ⅱ：$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n'$

右乘过渡矩阵 A，$\begin{pmatrix} \underline{\times A} \\ A\times \end{pmatrix}$

$$(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n') = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n) \cdot A$$

$$\xi = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1', \varepsilon_2', \cdots, \varepsilon_n')\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X = AY$.

∴ 坐标变换 $Y = A^{-1}X$.

9. 在 P^4 中，求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵，并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标.设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标；

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,-1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标；

10. 继第 9 题 1)，求一非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下有相同的坐标.

9-2 解：$(\eta_1^T,\eta_2^T,\eta_3^T,\eta_4^T)=(\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T,\varepsilon_4^T)\cdot A$

$(N,M)\to(E,N^{-1}M)$

令 $M=(\eta_1^T,\eta_2^T,\eta_3^T,\eta_4^T)$.

$M=N\cdot A$

$N=(\varepsilon_1^T,\varepsilon_2^T,\varepsilon_3^T,\varepsilon_4^T)$

矩阵方程.

则 M,N 可逆.

$A=N^{-1}M.$

$A=N^{-1}M.$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&2&0&-2&1\\2&-1&2&-1&1&1&1&3\\-1&1&1&0&0&2&1&1\\0&1&1&1&1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&2&0&-2&1\\0&-3&4&1&-3&1&5&1\\0&2&0&-1&2&2&-1&2\\0&1&1&1&1&2&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 - r_4 \\ r_2 + 3r_4 \\ r_3 - 2r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 - r_3 \\ r_2 + 3r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 + 3r_3 \\ r_4 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_4 \\ r_3 \cdot (-\frac{1}{13})}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 - r_4 \\ r_2 - 6r_4 \\ r_3 + 5r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，A 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A.$$

证明：$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数等于 A 的秩.

在向量空间情况

令 $B=(\beta_1\cdots\beta_s)$，令 $C=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$.

基 $\Rightarrow$ C 可逆.

矩阵左乘可逆阵，秩不变.

证明：设 $\operatorname{rank} A=r$

$\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ 为 A 的列向量，

$\gamma_{i_1},\cdots,\gamma_{i_r}$ 为 $\gamma_1\cdots\gamma_s$ 的一组极大线性无关组.

$$\beta_j=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cdot\gamma_j,\quad j=1,\cdots,n$$

下证 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关.

设 $k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0$

$$k_1\cdot(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\cdot\gamma_{i_j}+\cdots+k_r\cdot(\alpha_1\cdots\alpha_n)\gamma_{i_j}=0$$

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)\cdot[k_1\gamma_{i_1}+\cdots+k_r\gamma_{i_r}]=0$$

$\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_r}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $k_1=\cdots=k_r=0$

$\Rightarrow$ $\beta_{i_1}\cdots\beta_{i_r}$ 线性无关.

~~再~~证：$\forall \beta_j$ 可由 $\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_r}$ 线性表出。

$$\beta_j = (\alpha_1, \cdots \alpha_n) \cdot \gamma_j$$

极大无关组

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot (k_1 \gamma_{i_1} + \cdots + k_r \gamma_{i_r})$$

$$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot k_1 \gamma_{i_1} + \cdots + (\alpha_1 \cdots \alpha_n) k_r \gamma_{i_r}$$

$$= k_1 \beta_{i_1} + \cdots + k_r \beta_{i_r}.$$

$\therefore$ $\beta_{i_1} \cdots \beta_{i_r}$ 为 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 的一个极大线性无关组.

$\therefore$ $L(\beta_1, \cdots \beta_s) = L(\beta_{i_1}, \cdots \beta_{i_r}) = r = \text{rank} A.$

证

12. 设 V_1, V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1 \subset V_2$，证明：如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1 = V_2$.

证明：若 $\dim V_1 = \dim V_2 = 0$，则 $V_1 = V_2 = 0$.

否则设 $\dim V_1 = \dim V_2 = n$

且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V_1 一组基.

由 $V_1 \subset V_2$ 知 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为 V_2 中 n 个线性无关向量.

又 $\dim V_2 = n$

$\therefore \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 为 V_2 一组基.

$\therefore V_2 = L(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = V_1$

无限 V

有限 基.

4. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 α 使 $\alpha \notin V_1, \alpha \notin V_2$ 同时成立.

5. 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一向量不属于 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 中任何一个.

4. 证明：V_1, V_2 为 V 非平凡子空间.

$\therefore \exists \alpha \in V - V_1$

$\exists \beta \in V - V_2$

若 $\alpha \notin V_2$，或 $\beta \notin V_1$，则结论成立.

否则 $\alpha \in V_2 - V_1$，$\beta \in V_1 - V_2$

考虑 $\alpha + \beta$，

反证，若 $\alpha + \beta \in V_1$，则由 $\beta \in V_1$，

知 $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta \in V_1$ 矛盾.

$\therefore \alpha+\beta \notin V_1$

同理 $\alpha+\beta \notin V_2$，证毕。

5、数学归纳证明.

13. 设 $A\in P^{n\times n}$.

1）证明：全体与 A 可交换的矩阵组成 $P^{n\times n}$ 的一子空间，记作 $C(A)$；

$C(F) := \{B\in P^{n\times n} \mid BA=AB\}$ 求子空间.

中心化子 Centralizer.

$\alpha,\beta\in V,\ k,l\in P$

$\Rightarrow k\alpha+l\beta\in V$.

2）当 $A=E$ 时，求 $C(A)$；

3）当

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{pmatrix}$$

时，求 $C(A)$ 的维数和一组基.

14.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$AB=BA$

求 $P^{3\times3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基.

14. 解：$A=E+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{pmatrix}\triangleq E+D$

$\forall B\in P^{n\times n},\quad AB=BA \iff DB=BD$

令 $B=\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\\b_4&b_5&b_6\\b_7&b_8&b_9\end{pmatrix}$

$DB=BD$ 知

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3b_1+b_4+b_7&3b_2+b_5+b_8&3b_3+b_6+b_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b_3&b_3&b_3\\3b_6&b_6&b_6\\3b_9&b_9&b_9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b_3=b_6=0\\3b_1+b_4+b_7=3b_9\\3b_2+b_5+b_8=b_9\\3b_3+b_6+b_9=b_9\end{cases}\iff\begin{cases}b_4=9b_2+3b_5+3b_8-3b_1-b_7\\b_9=3b_2+b_5+b_8.\end{cases}$$

7个未知量，2个方程.

5个自由未知量

基础解系为

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ b_1=1\qquad B_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\9&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}\ b_2=1\qquad B_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ b_5=1$$

$$B_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ b_7=1\qquad B_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\ b_8=1$$

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 线性无关，所以是 $C(A)$ 一组基. $\dim C(A)=5$. □

15. 如果 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}+c_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，且 $c_1c_3\neq0$，证明：$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

证明： $c_1c_3\neq0$

$\Rightarrow c_1\neq0,\ c_3\neq0$.

$c_1\neq0 \Rightarrow \alpha=-\frac{c_2}{c_1}\beta-\frac{c_3}{c_1}\gamma \Rightarrow \{\beta,\gamma\}$ 可表示 $\{\alpha,\beta\}$

$c_3\neq0 \Rightarrow \gamma=-\frac{c_1}{c_3}\alpha-\frac{c_2}{c_3}\beta \Rightarrow \{\alpha,\beta\}$ 可表出 $\{\beta,\gamma\}$

$\therefore \{\alpha,\beta\}$ 与 $\{\beta,\gamma\}$ 等价

$\therefore L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$ □

16. 在 P^4 中，求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 生成的子空间的基与维数.设

1) $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-3,0), \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1,1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1), \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3,1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,3,-1), \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,5,-3,1). \end{cases}$

17. 在 P^4 中，求由齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

* 维数公式

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

容斥原理：

$$|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$$

最小公倍数式 & 最大公约数式.

$$[f,g]\cdot(f,g)=f\cdot g$$

思考以上三部分的联系。