18. 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 生成的子空间与由向量 $\boldsymbol{\beta}_i$ 生成的子空间的交的基和维数.设

1) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1,0);\end{cases}$

3) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-6,-5),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$

18 解： $L(\alpha_1,\alpha_2)=\{x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T \mid \forall x_1,x_2\in P\}$

$L(\beta_1,\beta_2)=\{y_1\beta_1^T+y_2\beta_2^T \mid \forall y_1,y_2\in P\}$

$\underset{L_1}{L(\alpha_1,\alpha_2)}\cap \underset{L_2}{L(\beta_1,\beta_2)}=\{X=x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T=y_1\beta_1^T+y_2\beta_2^T \mid x_1,x_2,y_1,y_2\in P\}$

$x_1\alpha_1^T+x_2\alpha_2^T-y_1\beta_1^T-y_2\beta_2^T=0$

$=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix}$

令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\beta_1^T,\beta_2^T)\xrightarrow{\text{行}}$ 阶梯形矩阵

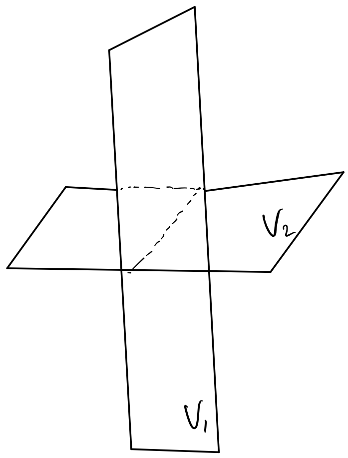
求基：$Y_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\b_{31}\\b_{41}\end{pmatrix},\cdots,Y_{n-r(A)}=\begin{pmatrix}a_{1,n-r}\\a_{2,n-r}\\b_{3,n-r}\\b_{4,n-r}\end{pmatrix}$

$L_1\cap L_2=L(a_{11}\alpha_1^T+a_{21}\alpha_2^T,\cdots,a_{1,n-r}\alpha_1^T+a_{2,n-r}\alpha_2^T)$

18-2. A 可逆. $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-y_1\\-y_2\end{pmatrix}=0$ 只有零解. $\therefore x_1=x_2=-y_1=-y_2=0$

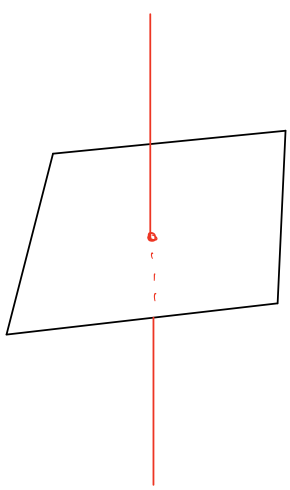
$L_1\cap L_2=L(0)=\{0\}$, 无基.

注意这里$\{0\}$不是 $AX=0$ 的零解.

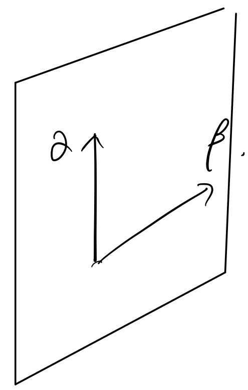


$V_1 \cap V_2$

$V_1 + V_2$



$V_1 \oplus V_2$



$$L(\alpha,\beta) = L(\alpha)+L(\beta)$$
$$= \{x\alpha+y\beta \mid \forall x,y \in P\}$$

* $L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$：求极大线性无关组

* $L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$：

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)X=0$

基础解系 $Y_1,\cdots,Y_{n-r}$ $\left(Y_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}\right)$

则 $L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$

$$= L(a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2, \cdots, a_{1,n-r}\alpha_1 + a_{2,n-r}\alpha_2)$$

$A=(\alpha_1 \cdots \alpha_s)$

$AX=0 \iff (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)X=0$

$K \triangleq \{X \mid AX=0\}$

$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)=\{AX \mid \forall X\in P^n\}$ 是P^n的线性子空间，$r(L)=r(A)$。

① 解空间。

K 为 P^n 的线性子空间。（* X, Y 是解 $\Rightarrow X+Y$ 是解，kX 是解）

$K=L(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r(A)})$ ← 基础解系生成。

$\dim K = n-r(A)$

* 解空间的交与和：

$K_1=\{X \mid AX=0\}$，$K_2=\{X \mid BX=0\}$

$K_1 \cap K_2 = \{X \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0\}$

$K_1+K_2 = L(\gamma_1 \cdots \gamma_{n-r(A)}, \gamma_1', \cdots, \gamma_{n-r(B)}')$，基础解系生成空间的和。

对比 $L(\alpha_1, \alpha_2)+L(\beta_1, \beta_2)$，$L(\alpha_1, \alpha_2) \cap L(\beta_1, \beta_2)$

K和L有何关系？（见下章值域与核）

Q：$AX=\beta$ 的解空间是线性空间吗？

不是，是因为 $\beta\neq 0$ 时，$A0\neq\beta$，不含 0 向量。

23. 在给定了空间直角坐标系的三维空间中,所有自原点引出的向量添上零向量构成一个三维线性空间 $\mathbf{R}^3$.

1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间?

2) 设有过原点的三条直线,这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1,L_2,L_3. 问 L_1+L_2, $L_1+L_2+L_3$ 能构成哪些类型的子空间,试全部列举出来.

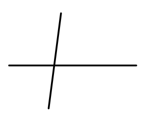
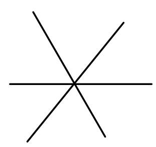
3) 就用几何空间的例子来说明:若 U,V,X,Y 是子空间,满足 $U+V=X$, $X\supset Y$,是否一定有 $Y=(Y\cap U)+(Y\cap V)$.

$+/\cup$, $+$ 对 $\cup$ 产生更多的向量.

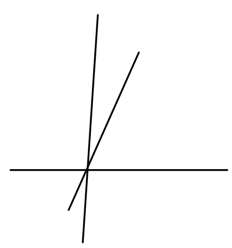
解: 1) 考虑 0 向量.

2). L_1, L_2, L_3 共线, $L_1+L_2+L_3=L_1=L_2=L_3\cong\mathbb{R}$

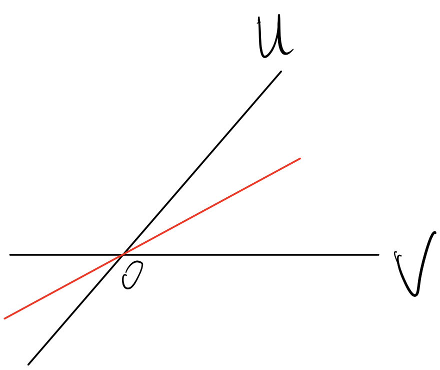
L_1, L_2, L_3 共面, 不共线, $L_1+L_2+L_3\cong\mathbb{R}^2$

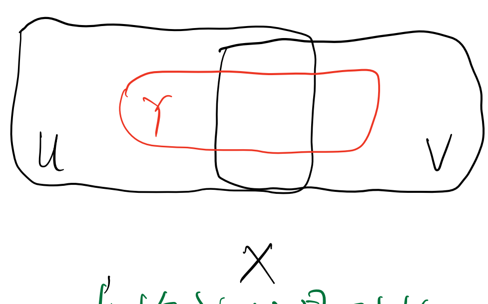
 or 

L_1, L_2, L_3 不共面, $L_1+L_2+L_3\cong\mathbb{R}^3$.



3).





$+$ 换成 $\cup$ 是对的.

定理 11. $V_1, \cdots, V_s$ 为 V 的子空间. TFAE.（下面描述等价）

1. $W = V_1 + \cdots + V_s$ 是直和；（Def: 每个向量分解唯一）

2. 零向量分解唯一；

3. 存在一个向量分解唯一；

4. $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$；$i = 1, 2, \cdots, s$；$\overset{\times}{\Leftrightarrow}$ $V_1 \cap \cdots \cap V_s = \{0\}$

5. $V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} = \{0\}$，$i = 2, \cdots, s$；（22 题）

6. $\dim W = \dim V_1 + \cdots + \dim V_s$

证明：$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$，$4 \Rightarrow 5 \overset{\text{归纳}}{\Rightarrow} 6$

$3 \Rightarrow 4$，设 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$，$\alpha_i \in V_i$ 表示唯一. 下证 4.

反证，若 $\exists i$，s.t $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j \neq \{0\}$

不妨假设 $i = 1$，$V_1 \cap (V_2 + V_3 + \cdots + V_s) \neq \{0\}$

则 $\exists$ 非零向量 $\beta \in V_1$，$\beta \in V_2 + V_3 + \cdots + V_s$

$\therefore \exists \beta_i \in V_i$，$i = 2, \cdots, s$，s.t.

$\beta = \beta_2 + \cdots + \beta_s \in V_2 + \cdots + V_s$

则 $\alpha = \alpha + \beta - \beta = (\alpha_1 + \beta) + (\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + (\alpha_s - \beta_s)$

与 3 矛盾。

$\therefore$ 4 成立.

$6 \Rightarrow 1$. 设 α 为 $V_1+\cdots+V_s$ 中任一向量.

对 s 进行归纳.

$s=2$ 时, 由两个线性空间直和判定可知. $6 \Rightarrow 1$ 成立.

假设对 $s-1$, $6 \Rightarrow 1$ 成立., 下证 s 个线性空间情况

$$\dim W = (\dim V_1 + \cdots + \dim V_{s-1}) + \dim V_s .$$

由两个线性空间直和判定知

$$W = (V_1+\cdots+V_{s-1}) \oplus V_s .$$

$\alpha = \beta_{s-1} + \alpha_s$ 表示唯一.

$\beta_{s-1} \in V_1+\cdots+V_{s-1}$, $\alpha_s \in V$

由归纳假设.

$\beta_{s-1} = \alpha_1+\cdots+\alpha_{s-1}$, $\alpha_i \in V_i$, $i=1,\cdots s-1$.

表示唯一

$\therefore \alpha = \alpha_1+\cdots+\alpha_s$ 表示唯一.

口

19. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$.

证明：$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}=e_1-e_n,\quad \alpha_2=e_2-e_n,\cdots,\ \alpha_{n-1}=e_{n-1}-e_n.$$

解空间 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$

$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的基础解系为

$\beta=(1,1,\cdots,1)$.

解空间 $V_2=L(\beta)$,

$\alpha_1\cdots\alpha_{n-1},\beta$ 线性无关

$\therefore V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\beta)=P^n$

$V_1\cap V_2=\{0\}$ / $\dim V_1+\dim V_2=(n-1)+n$

$\therefore P^n=V_1\oplus V_2$

注：证

① $P^n=V_1+V_2$ (一部分作业未证)

② $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$ 5. 判定定理

也可以构造

$\forall(x_1,\cdots,x_n)=(x_1-\frac{1}{n}\sum x_i,\cdots,x_n-\frac{1}{n}\sum x_i)$

$+(\frac{1}{n}\sum x_i,\cdots,\frac{1}{n}\sum x_i)$

证明 $P^n=V_1+V_2$

20. 证明：如果 $V=V_1\oplus V_2$，$V_1=V_{11}\oplus V_{12}$，那么 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

（直和是无序的）

证明：$V=V_1\oplus V_2$，$V_1=V_{11}\oplus V_{12}$

∴ $V=V_1+V_2$，$V_1=V_{11}+V_{12}$

∴ $V=V_{11}+V_{12}+V_2$

下验证 0 的分解唯一.

设 $0=\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_2$

由 $V=V_1\oplus V_2$ 知 $\alpha_{11}+\alpha_{12}=0$，$\alpha_2=0$

由 $V_1=V_{11}\oplus V_{12}$ 知 $\alpha_{11}=0$，$\alpha_{12}=0$.

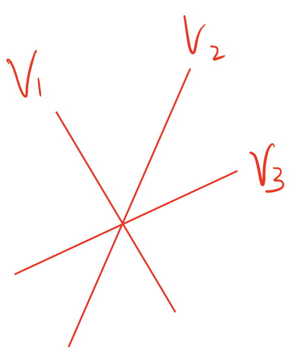
证.

∴ $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$

注意：$V_1\cap V_2\cap V_3=\{0\}$

$\not\Rightarrow V_1+V_2+V_3=V_1\oplus V_2\oplus V_3$

反例：平面 $\mathbb{R}^2$ 中



$V_1+V_2+V_3=\mathbb{R}^2$，2维的

若 $V_1+V_2+V_3=V_1\oplus V_2\oplus V_3$

则 $\dim V_1+V_2+V_3=3$ 矛盾.

∴ $V_1+V_2+V_3\neq V_1\oplus V_2\oplus V_3$.

21. 证明：每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

证明：设V为一个n维性空间，

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为V的一组基.

则 $V = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

$= L(\alpha_1) + \cdots + L(\alpha_n)$.

而 $\dim V = n$.

$\dim L(\alpha_1) + \cdots + \dim L(\alpha_n) = n = \dim V$.

由多个线性空间直和判别定理知

$V = L(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_n)$

从同构的观点看这题：

设V为数域P上的一个n维线性空间.

① $V \cong P^n$，（V和P^n同构）

取V的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

$\forall \beta \in V$，$\beta = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

令 $X_\beta = (x_1, \cdots, x_n)^T$

def $\rho: V \longrightarrow P^n$

$\beta \longmapsto X_\beta$

ρ 是同构 $\begin{cases} \text{双射} \\ \text{保持线性} \end{cases}$

② $P^n = L(e_1) \oplus L(e_2) \oplus \cdots \oplus L(e_n)$

$\downarrow \rho'$ 同构

③ $V = L(\rho'(e_1)) \oplus \cdots \oplus L(\rho'(e_n))$

同构的意义：

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\rho"] \\ P^n \end{tikzcd}$$

可以借助P^n来说明一般线性空间V

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"] & W \arrow[d, "\rho'"] \\ P^n \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & P^m \arrow[d] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

$f: V \xrightarrow{f} W$ 同态(保线性的映射)

$P^n \xrightarrow{\tilde{f}} P^m$ 同态

$P^N \xrightarrow{f_*} P^N$ 线性变换.

对于两个代数对象, A, B.

考虑 $\underbrace{\text{保持代数结构的映射}}_{\text{称为同态}}$ $A \to B$

比如, 线性空间的同态, 是指保持线性结构的映射.

由于 P上 任意一个n维线性空间都同构 P^n.

∴ $V^n \xrightarrow{f} W^m$ 的同态.

可以拉到, $P^n \to P^m$ 的同态.

$$P^n \xrightarrow{f} P^m$$

进一步 拉到 $P^N \xrightarrow{f_*} P^N$ 的 $\underbrace{\text{线性变换}}_{=\text{自身到自身的线性同态}}$.

所以我们只要研究清楚线性变换, 就能弄清同态.

所以 就只关心线性变换 (下一章)

11. 证明:实数域作为它自身上的线性空间与第3题8)中的空间同构.

证明: 维数都为1, 所以 $(\mathbb{R}^+, \oplus, \circ) \cong (\mathbb{R}, +, \cdot)$.

构造映射

$$\rho: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto \log_a x. \quad a \neq 1$$

下证 ρ 是同构.

即 ① ρ 是双射.

② ρ 保线性

一定要说明.

1. 1) 证明：在 $P[x]_n$ 中，多项式

$$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

是一组基，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数；

2) 在 1) 中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证明：设 $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=0$

令 $x=a_i$，则 $f_i(a_i)=\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)$ $\delta_{ij}=$

$$f_j(a_i)=0$$

$\therefore$ $k_1f_1+\cdots+k_nf_n=k_if_i(a_i)=0 \Rightarrow k_i=0$

同理 $k_1=\cdots=k_n=0$. $\therefore$ $f_1\cdots f_n$ 线性无关.

$\because$ $\dim P[x]_n=n$，$\therefore$ $f_1\cdots f_n$ 为一组基.

2). 设 $(a_1,\cdots a_n)=(1,\varepsilon,\cdots\varepsilon^{n-1})$，$\varepsilon$ 为 n 次单位根，$\varepsilon^n=1$

$\because$ $x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$

$=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

$$f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-a_j)=\frac{\prod(x-a_j)}{x-a_i}=\frac{x^n-1}{x-a_i}=\frac{x^n-a_i^n}{x-a_i}$$

$$=1\cdot x^{n-1}+a_i\cdot x^{n-2}+a_i^2\cdot x^{n-3}+\cdots+a_i^{n-1}\cdot 1$$

$$=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}a_i^{n-1}\\ \vdots\\ a_i^2\\ a_i\\ 1\end{pmatrix}$$

∵ 过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{n-1} & (\varepsilon^2)^{n-1} & & (\varepsilon^{n-1})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^2 & (\varepsilon^2)^2 & \cdots & (\varepsilon^{n-1})^2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

★ 过渡矩阵第 i 个列向量为 β_i 在基 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 下的坐标.

$$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A$$

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一秩为 n 的二次型，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个

$$\frac{1}{2}(n - |s|)$$

维子空间 V_1（其中 s 为符号差），使对任一 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V_1$ 有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$.

一般 ⟷ 特殊.

提示：通过合同，考虑标准型.

$$f(y_1 \cdots y_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q=n}^2$$

内直和：给定一个线性空间 V.

V_1, V_2 为 V 的子空间.

$V_1 \oplus V_2$，为内直和.（其中的线性结构 $(+,\cdot)$ 仍是 V 中的 $(+,\cdot)$）

（内直和侧重于分解）

外直和：设 $V=(S_1, +_1, \cdot_1)$

$W=(S_2, +_2, \cdot_2)$

为两个线性空间.

定义 $V \oplus W = (S_1 \times S_2, (+_1, +_2), (\cdot_1, \cdot_2))$ ←新的线性空间结构

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) \triangleq (\alpha_1 +_1 \alpha_2, \beta_1 +_2 \beta_2)$$

$$k\cdot(\alpha_1, \beta_1) \triangleq (k \cdot_1 \alpha_1, k \cdot_2 \beta_2).$$

例：$\mathbb{R}$ 上线性空间 $\mathbb{R}$ 和 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$\mathbb{R} \oplus M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$(x, A) + (y, B) = (x+y, A+B)$$

$$k\cdot(x, A) = (k\cdot x, kA)$$

(外直积 ⇒ 构造新对象)

直积：与直和对应的一个代数运算.

(对于线性空间来说，只有在无限多个线性空间时，
直和与直积才有区别)