线性空间习题课 3

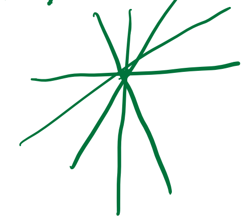
吴利苏

山东科技大学数学学院

2022 年 4 月 5 日

1、([2, P396]) 设 $V_1,\dots V_s$ 为 V 的真子空间，则存在 V 的基，基中的每一个向量均不在 $V_1,\dots V_s$ 中.

$\mathrm{span}\{V - \cup V_i\} = V$



(对比补5)

证明：归纳证明：

1. $s=1$ 时，$V_1 \neq \{0\}$，设 V_1 的基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ $(r<n)$

   扩充为 V 的基 $\alpha_1,\cdots\alpha_r,\alpha_{r+1}\cdots,\alpha_n$

   则考虑、$\alpha_1+\alpha_n,\ \alpha_2+\alpha_n,\ \cdots,\ \alpha_r+\alpha_n,\ \alpha_{r+1},\cdots\alpha_n$ 即为满足要求的基

2. 假设 $s=k$ 时结论成立，

   即存在 V 的一组基 $\beta_1,\cdots\beta_n$ s.t. $\beta_i\notin V_j$, $\forall i=1,\cdots n$, $j=1,\cdots,k$

下证 $s=k+1$ 的情况

V_{k+1} 为真子空间，$\therefore\ \exists\ \beta_i \notin V_{k+1}$

不妨设 $\beta_1,\cdots,\beta_r \in V_{k+1}$ $\beta_{r+1}\cdots\beta_n \notin V_{k+1}$ $(r<n)$

考虑 $\{\beta_1+m\beta_n \mid m=1,2,\cdots\}$ 中任意两个元素都不能同时存在 V_j 中 $\forall j=1,\cdots,k$

(否则 $\beta_n \in V_i$ 矛盾)　　$V_1,V_2,\cdots,V_{s-1}$ 中每个最多有一个.

$\therefore \exists m_1$, s.t. $\beta_1+m_1\beta_n \notin V_j$, $\forall j=1\cdots k$.

同理……

则 $\beta_1+m_1\beta_n$, $\beta_2+m_2\beta_n$, $\cdots$, $\beta_r+m_r\beta_n$, $\beta_{r+1},\cdots\beta_n$. 即为所求的基.

(线性无关性很容易)

2、([2, P397]) V 为不可数数域 F 上的 n 维线性空间，求证: 可数个真子空间不能覆盖它.

$\{V_i\}_{i\in I}$ 覆盖 V 是指 $V \subset \bigcup_{i\in I} V_i$

证明：设 $V_1, V_2, \cdots$ 为 V 的真子空间，下证

$\exists\, \alpha \in V$，$\alpha \notin V_i$，$\forall i = 1, 2, \cdots$

$n=1$ 时，无真子空间，

下设 $n>1$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的基.

令 $S = \{\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k^{n-1}\alpha_n \mid k \in F - \{0\}\}$，

定义 $\varphi: F - \{0\} \longrightarrow S$

$k \longmapsto \alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k^{n-1}\alpha_n$

φ 为双射：

单：

满：

F 不可数 $\Rightarrow F-\{0\}$ 不可数 $\Rightarrow S$ 不可数.

V_i 为真子空间，S在 V_i 中元素不超过 n 个 (*)

所以 一定存在 $\alpha \in S$，$\alpha \notin V_i$，$\forall i=1,2,\cdots$

仅证 *.

否则
$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_2 + \cdots + k_1^{n-1}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = \alpha_1 + k_n\alpha_2 + \cdots + k_n^{n-1}\alpha_n \end{cases}$$
k_i 两两不同.

系数行列式非0 $\Rightarrow \alpha_j \in V_i$，$\forall j=1,\cdots n$，$\Rightarrow V=V_i$ 矛盾.

$V_1\ V_2 \cdots V_n \cdots$ 仍然可数.

至多n个

S 中不可数个. $\therefore \exists \alpha \notin V_i$，$\forall i=1,\cdots n$

3、([2, P400]) 设 V 为 R 上的 n 维向量空间, 任给正整数 $m(\geq n)$, 证明: 存在 m 个向量, 其中任取 n 个向量线性无关.

证: 取 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

$$S_m = \left\{ \underbrace{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}}_{Y_x} \;\middle|\; x = 1, 2, \cdots, m \right\}$$

则 $\forall$ n 个向量都线性无关.

$$k_1 (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) Y_{x_1} + k_2 (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) Y_{x_2} + \cdots + k_n (\alpha_1, \cdots) Y_{x_n} = 0$$

$$= (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)(k_1 Y_{x_1} + \cdots + k_n Y_{x_n}) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0.$$

证.

线性空间的定义

$(V \neq \phi,\ P,\ +,\ \cdot\ )$.

1), $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2), $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3) $\exists$ 0元

4), $\exists$ 负元

5, $1\cdot\alpha=\alpha$

6, $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

7, $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

8, $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

4.1、([3, P53]) 线性空间的定义中，加法交换律不是独立的，可由其他 7 条推出。

证明：

$$(1+1)(\alpha+\beta) \overset{7}{=} (1+1)\alpha + (1+1)\beta$$

$$\overset{2}{=} \alpha+(\alpha+\beta)+\beta \qquad ①$$

$$(1+1)(\alpha+\beta) \overset{8}{=} 1\cdot(\alpha+\beta) + 1\cdot(\alpha+\beta)$$

$$\overset{2,5}{=} \alpha+(\beta+\alpha)+\beta \qquad ②$$

$\Rightarrow$ ① ② 左加 $-\alpha$，右加 $-\beta^{④}$

则 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

下面我们举出一些非线性空间的实例 (4.2-4.8)

4.2、([3, P53]) 说明不能取消 2) 的例子。

解：加法结合律.

$V=\{e, a, b, c\}$ $\quad P=\mathbb{R}$

$+$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	e	a
b	b	e	b	e
c	c	a	e	c

$(a+b)+c = e+c = c$

$a+(b+c) = a+e = a \neq$

(负元不唯一)

$k\cdot x = x$. $(\forall k\in\mathbb{R}, x\in V)$

0元为 e.

其余成立.

4.3、([3, P53]) 说明不能取消 3) 的例子。

解：$\exists$ 0元.

$V=\{e, a, b\}$ $P=\mathbb{R}$.

+	e	a	b
e	e	a	a
a	a	a	a
b	a	a	b

$k\cdot x = x$

$\forall x\in V$, $\exists y\in V$. s.t

$x+y=a$

但元 $0+x=x+0=x$. , $\forall x\in V$.

4.4、([3, P53]) 说明不能取消 4) 的例子。

解：∃负元.

$V=\{e,a\}$，$P=\mathbb{R}$

$+$	e	a
e	e	a
a	a	a

$k\cdot a=a$.

$a+x=x+a=e$.

方.无解.

4.5、([3, P53]) 说明不能取消 5) 的例子。

解：单位

$P=\mathbb{R}$, $V=\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$.

$+$: $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

$k\cdot(a,b)=(ka,0)$, $\forall k\in\mathbb{R}$.

无单位1.

4.6、([3, P53]) 说明不能取消 6) 的例子。

结合律.

解: $V=\mathbb{R}$, $P=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in \mathbb{Q}\}$.

$+$: $\mathbb{R}$中加法

$*$:

$$(a+b\sqrt{2})*x \triangleq (a+b)\cdot x$$

$$(\sqrt{2}\,\sqrt{2})*1 = 2*1 = 2$$

$\times$

$$\sqrt{2}*(\sqrt{2}*1) = \sqrt{2}*1 = 1$$

4.7、([3, P53]) 说明不能取消 7) 的例子。

解: $V=\mathbb{R}-\{0\}$, $P=\mathbb{R}$

$\oplus$: $x\oplus y = x\cdot y$

$*$: $k*x = k\cdot x$

$$2*(1\oplus 1) = 2*(1\cdot 1) = 2\cdot 1 = 2$$

$$(2*1)\oplus(2*1) = 2\oplus 2 = 2\cdot 2 = 4$$

4.8、([3, P53]) 说明不能取消 8) 的例子。

解：$V=\{e,a\}$. $P=\mathbb{R}$.

$+$	e	a
e	e	a
a	a	e

$k\cdot x = x$, $x\in V$, $k\in P$.

$(1+1)\cdot a = 2\cdot a = a$

$\times$.

$1\cdot a + 1\cdot a = a + a = 2a$

5、([1, 子空间与整个空间的关系,T791])

设 V 为数域 F 上的 $n(>1)$ 维线性空间. 证明: V 的 r 维子空间有无穷多个, 其中 $1 \leq r < n$.

证明: 设V的一组基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

考虑 $S = \{\alpha_1 + x\alpha_2 + \cdots + x^{n-1}\alpha_n \mid x \in F - \{0\}\}$.

则 S中∀ r个向量生成的线性子空间都不一样.

证/

6、([1, 体会线性空间与基集合关系,T801]) 无限维线性空间中基的定义，

设 B 是线性空间 V 的一个非空子集合。若 B 中任意有限个向量都线性无关，且 V 中的每一个向量都可由 B 中有限个向量线性表示，则称 B 为 V 的一组基。

设 B_1, B_2 分别是 V 的子空间 V_1 和 V_2 的基。证明: V_1+V_2 是直和的充要条件是 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ 且 $B_1 \cup B_2$ 是 V_1+V_2 的基。

证明: "$\Rightarrow$" $V_1+V_2=V_1 \oplus V_2$.

$\because V_1 \cap V_2 = \phi$.

$\therefore B_1 \cap B_2 = \phi$.

下证 $B_1 \cup B_2$ 为 $V_1+V_2=V_1 \oplus V_2$ 的基

设 $k_1 \alpha_1 + \cdots + k_s \alpha_s + l_1 \beta_1 + \cdots + l_t \beta_t = 0$.

$\alpha_i \in B_1$ $\beta_j \in B_2$

V_1+V_2 为直和.

$\because$ $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$

$l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t=0$

$\therefore$ $k_1=\cdots=k_s=0$, $l_1=\cdots=l_t=0$

即 B 中 $\forall$ 有限个向量线性无关.

另一方面, $\forall$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V_1+V_2$, $\alpha_1\in V_1$, $\alpha_2\in V_2$

由于 α_1 可由 B_1 中有限个向量线性表示.

α_2 可由 B_2 中有限个向量线性表示,

$\therefore$ α 可由 B_1+B_2 中有限个向量表示

$\therefore$ $B_1\cup B_2$ 为 V_1+V_2 的一组基.

"$\Leftarrow$" $B_1\cap B_2=\phi$, $B_1\cup B_2$ 为 V_1+V_2 的基

$\forall\alpha\in V_1\cap V_2$, $\alpha\in V_1$, $\alpha\in V_2$

$\therefore$ 可设 $\alpha=\underset{\substack{\uparrow\\ L(B_1)}}{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s}=\underset{\substack{\uparrow\\ L(B_2)}}{l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t}$.

$\therefore$ $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s-l_1\beta_1-\cdots-l_t\beta_t=0$

由于 $B_1\cap B_2=\phi$, $B_1\cup B_2$ 为基

$\therefore$ $\alpha_1\cdots\alpha_s$, $\beta_1\cdots\beta_t$ 线性无关

$\therefore$ $k_1=\cdots=k_s=l_1=\cdots=l_t=0$

$\Rightarrow\alpha=0$ $\Rightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$ $\Rightarrow V_1+V_2=V_1\oplus V_2$ $\square$

7、([1, 引正交、正交补,T802])

α 为列向量.

证明：P^n 的任一子空间 V 都是某个 n 元齐次方程组 $AX = 0$ 的解空间。

证明：0. P^n. 分别为到满秩 $AX=0$, $0X=0$ 的解空间.

设 V 为 P^n 非平凡子空间., $0<\dim V=r<n$

$\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 为 V 一组基.

$$\begin{cases} \alpha_1^T X = 0 \\ \alpha_2^T X = 0 \\ \vdots \\ \alpha_r^T X = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_r^T \end{pmatrix} X = 0$$

的基础解系设为 $\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}$

则 $\alpha_i^T \beta_j = 0$, $\forall i, j$,

$\qquad \parallel$

$\quad \beta_j^T \alpha_i$

$(\alpha_i, \beta_j) \triangleq \alpha_i^T \beta_j$ 一种内积.

$(\alpha_i, \beta_j) = 0 \iff \alpha_i \perp \beta_j$. 正交.

则 $\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots\\ \beta_{n-r}^T\end{pmatrix}X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$.　　$L(\beta_1,\cdots\beta_{n-r})$ 与 $L(\alpha_1,\cdots\alpha_r)$ 互为正交补空间

$\therefore$ $\begin{pmatrix}\beta_1^T\\ \vdots\\ \beta_{n-r}^T\end{pmatrix}X=0$ 的解空间为 $L(\alpha_1,\cdots\alpha_r)=V$.

8、([1, 体会乘积使维数变小,T805])

设 A, B 分别为数域 P 上的 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵，又 $W = \{B\alpha \mid \alpha \in P^n, AB\alpha = 0\}$ 是 n 维列向量空间 P^n 的子空间，证明：

$$\dim W = \mathrm{R}(B) - \mathrm{R}(AB)$$

证明：设 $R(B)=r$, $R(AB)=t$.

$BX=0$ 的解空间 V_1 的维数为 $s-r \triangleq p$

$ABX=0$ 的解空间 V_2 维数为 $s-t \triangleq q$.

$V_1 \subseteq V_2$，取 V_1 的一组基 $\alpha_1 \cdots \alpha_p$

扩充为 V_2 的一组基 $\alpha_1, \cdots \alpha_p\ \alpha_{p+1} \cdots \alpha_q$.

$B\alpha_1 = \cdots = B\alpha_p = 0$.

且 $W = L(B\alpha_1 \cdots B\alpha_p, B\alpha_{p+1}, \cdots B\alpha_q)$

$= L(B\alpha_{p+1}, \cdots B\alpha_q)$

下证：$B\alpha_{p+1}, \cdots, B\alpha_q$ 线性无关.

按定义证！

设 $k_{p+1}B\alpha_{p+1} + \cdots + k_q B\alpha_q = 0$.

$\therefore B(k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q) = 0$

$\therefore k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q \in V_1$

$\therefore k_{p+1}\alpha_{p+1} + \cdots + k_q\alpha_q = k_1\alpha_1 + \cdots + k_p\alpha_p$

$\alpha_1, \cdots \alpha_q$ 线性无关.

$\therefore k_{p+1} = \cdots = k_q = 0$

$\therefore B\alpha_{p+1} \cdots B\alpha_q$ 线性无关.

$\therefore \dim W = q - p = r - t = \operatorname{rank} B - \operatorname{rank} AB.$

9、([1, Frobenius 不等式,T806])

设 A, B, C 分别为数域 P 上的 $m \times n, n \times p, p \times q$ 矩阵。证明:

$$\mathrm{R}(ABC) \geq \mathrm{R}(AB) + \mathrm{R}(BC) - \mathrm{R}(B).$$

提示：利用上题，并与分块矩阵初等变换法证明比较。

证明: 令 $W_1 = \{BC\alpha \mid ABC\alpha = 0, \alpha \in P^q\}$ $= L(BC)$

$W_2 = \{B\beta \mid AB\beta = 0, \beta \in P^p\}$ $= L(B)$

若 $BC\alpha \in W_1$，则 $ABC\alpha = 0 \Rightarrow AB(C\alpha) = 0 \Rightarrow B\beta \in W_2$.

$\Rightarrow W_1 \subset W_2$，$\dim W_2 \geq \dim W_1$.

由上题: $\dim W_1 = r(BC) - r(ABC)$

$\dim W_2 = r(B) - r(AB)$

$\Rightarrow R(ABC) \geq R(AB) + R(BC) - R(B)$. 　□

10、([1, T808])

设 A 为 n 阶满秩矩阵，任意将 A 分成两个子块 $A=\binom{A_1}{A_2}$。证明：P^n 是齐次线性方程组 $A_1X=0$ 和 $A_2X=0$ 解空间的直和。

(19题)

证明：设 $A_1X=0$ 解空间为 V_1，$A_2X=0$ 解空间为 V_2.

① $P^n=V_1+V_2$.

② $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$.

$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r_1})$，$r_1=r(A_1)$. $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r_1}$ 基础解系

$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r_2})$.

下证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r_1},\beta_1,\cdots,\beta_{n-r_2}$ 无关.

$\underbrace{k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r_1}\alpha_{n-r_1}}_{\alpha}+\underbrace{l_1\beta_1+\cdots+l_{n-r_2}}_{\beta}\beta_{n-r_2}=0$

$\Rightarrow V_1\cap V_2=(AX=0$ 解空间$)=\{0\}$ $\Rightarrow \alpha=0=\beta=0\Rightarrow$ 无关.

11、([1, 讲幂零阵特征值会用到,T809])
设 A 为数域 P 上的幂等阵，即 $A^2 = A$. 证明：P^n 可分解为齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $(A - E)X = 0$ 解空间的直和。

证明

$AX=0 \Rightarrow V_1$

$(A-E)X=0 \Rightarrow V_2$.

① $P^n = V_1 + V_2$, $\forall\ \alpha = \underbrace{(\alpha - A\alpha)}_{\in V_1} + \underbrace{A\alpha}_{\in V_2}$,

② $P^n = V_1 \oplus V_2$ $\Leftarrow$ $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Reference

- 杨子胥. 高等代数习题解 · 下.
- 王品超. 高等代数新方法 · 上.
- 邵品琮, 李师正. 高等代数中的 *265* 个反例.