1. 判别下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是：

1) 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

2) 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量；

3) 在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$；

4) 在 P^3 中，$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$；

5) 在 $P[x]$ 中，$\mathscr{A}f(x)=f(x+1)$；

6) 在 $P[x]$ 中，$\mathscr{A}f(x)=f(x_0)$，其中 $x_0\in P$ 是一固定的数；

7) 把复数域看作复数域上的线性空间，$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\overline{\boldsymbol{\xi}}$；

8) 在 $P^{n\times n}$ 中，$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵.

Q：线性变换的定义.

1)和2)：注意 $\alpha=0$ 的情况，此时 1)为单位变换
2)为零变换.

8) 需要说明理由.　(谢新/张雨荷)

$\mathscr{A}$ $\mathscr{A}$ $\mathscr{A}$ $\mathscr{A}$

$\mathscr{B}$

$\mathscr{C}$

$\mathscr{D}$

$\mathscr{E}$ $\mathscr{E}$

3. 在 $P[x]$ 中，$\mathscr{A}f(x)=f'(x)$，$\mathscr{B}f(x)=xf(x)$，证明：

$$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

4. 设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是线性变换，如果 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$，证明：

$$\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\,\mathscr{A}^{k-1},\quad k>1.$$

注：$[A,B]=AB-BA$ 交换子 / 换位子 commutator.

$[A,B]=ABA^{-1}B^{-1}$

3. 证明：$\forall f(x)\in P[x]$

$$\begin{aligned}(AB-BA)f(x) &= (AB)f(x)-(BA)f(x)\\ &= A(Bf(x))-B(Af(x))\\ &= A(xf(x))-Bf'(x)\\ &= (xf(x))'-xf'(x)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

$\mathscr{A}$

$\therefore\ AB-BA=E.$ □

4. 证明：k=2时 / k=1时

$$A^2B-BA^2 \overset{①}{=} A(AB-BA)+(AB-BA)A=2A$$

$$\overset{②}{=} A(BA+E)-(AB-E)A=2A$$

假设对 $k=m$ 时有.

$$A^mB-BA^m=mA^{m-1}$$

则

$$\begin{aligned}A^{m+1}B-BA^{m+1} &= A^m(AB-BA)+(A^mB-BA^m)A\\ &= A^m+mA^m=(m+1)A^m\end{aligned}$$

所以对 $\forall k>1$，结论成立.

5. 证明：可逆变换是双射.

设 $f: V \longrightarrow W$,

证 f 是单射 $\begin{cases} ① \ \forall \alpha \neq \beta，则 f(\alpha) \neq f(\beta) \\ 逆否：若 f(\alpha)=f(\beta)，则 \alpha=\beta. \\ ② \ \underbrace{f^{-1}(0)}_{\ker f} = \{0\}，即 f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=0 \end{cases}$

证 f 是满射：$\forall \alpha \in W$，$\exists \beta \in V$ s.t. $f(\beta)=\alpha$.

（W 中每个元素都有原像）

Q：线性空间的同构是可逆的吗？

5、证明：

① 证 f 为单的.

$\forall \alpha, \beta \in V$，若 $A(\alpha) = A(\beta)$

则 $\alpha = A^{-1}A(\alpha) = A^{-1}A\beta = \beta$

$\therefore$ f 为单的.

② 证 f 为满的.

$\forall \alpha \in V$，令 $\beta = A^{-1}(\alpha)$

则 $A(\beta) = A(A^{-1}(\alpha)) = A \cdot A^{-1}(\alpha) = \alpha$

$\therefore f$ 为满的.

综上 f 为双射.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，证明：$\mathscr{A}$ 可逆当且仅当 $\mathscr{A}\varepsilon_1,\mathscr{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathscr{A}\varepsilon_n$ 线性无关.

Q：如何定义一个线性变换. $f: V \longrightarrow V$

①

② 基

③. 矩阵.

6. 证明：

"$\Rightarrow$" A可逆. 证 $A\varepsilon_1,\cdots,A\varepsilon_n$ 线性无关。

设 $k_1 A\varepsilon_1 + \cdots + k_n A\varepsilon_n = 0$

则 $A(k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n) = 0$.

由于 A 可逆. 故

$k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n = 0$

又 $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$ 为 V 的一组基，即线性无关.

$\therefore k_1 = \cdots = k_n = 0$.

"$\Leftarrow$" $A\varepsilon_1 \cdots A\varepsilon_n$ 线性无关 证 A 可逆.

$A\varepsilon_1, \cdots A\varepsilon_n$ 线性无关 故为一组基

设 $(A\varepsilon_1 \cdots A\varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) B$，B为过渡矩阵.

考虑. 线性变换. A'

$(A'\varepsilon_1, \cdots, A'\varepsilon_n) \triangleq (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) B^{-1}$.

则 $AA'(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n) = A((\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) B^{-1}) = A$

7. 求下列线性变换在所指定基下的矩阵：

1）第 1 题 4）中变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

2）$[O;\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 是平面上一直角坐标系，$\mathscr{A}$ 是平面上的向量对第一和第三象限角的平分线的垂直投影，$\mathscr{B}$ 是平面上的向量对 ε_2 的垂直投影，求 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵；

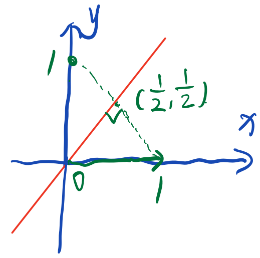
3）在空间 $P[x]_n$ 中，设变换 $\mathscr{A}$ 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$，求 $\mathscr{A}$ 在基

$$\varepsilon_0=1,\quad \varepsilon_i=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!},\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

下的矩阵；

7-2. 解：

注意. $A\varepsilon_1 = A\varepsilon_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $\neq (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$



7-3. 解：

$$A\varepsilon_0 = 0$$
$$A\varepsilon_1 = \varepsilon_0$$
$$A\varepsilon_2 = \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$A\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n.$$

$$(A\varepsilon_0,\cdots A\varepsilon_{n-1}) = (\varepsilon_0,\cdots\cdots\varepsilon_{n-1})B.$$

赵子迪.

$$B = ?$$

4) 6 个函数

$$\varepsilon_1 = e^{ax}\cos bx,\qquad \varepsilon_2 = e^{ax}\sin bx,\qquad \varepsilon_3 = xe^{ax}\cos bx,$$

$$\varepsilon_4 = xe^{ax}\sin bx,\qquad \varepsilon_5 = \frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\qquad \varepsilon_6 = \frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个 6 维线性空间，求微分变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\varepsilon_i\,(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵；

5) 已知 P^3 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1=(-1,1,1)$，$\eta_2=(1,0,-1)$，$\eta_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

6) 在 P^3 中，$\mathscr{A}$ 定义如下：

$$\begin{cases} \mathscr{A}\eta_1=(-5,0,3), \\ \mathscr{A}\eta_2=(0,-1,6), \\ \mathscr{A}\eta_3=(-5,-1,9), \end{cases} \quad \text{其中} \begin{cases} \eta_1=(-1,0,2), \\ \eta_2=(0,1,1), \\ \eta_3=(3,-1,0), \end{cases}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

7) 同上，求 $\mathscr{A}$ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

∵ η_1,η_2,η_3 为基，$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. 解： $A\eta_i = X_i\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}$

$$(A\eta_1, A\eta_2, A\eta_3) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= (\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= (\eta_1,\eta_2,\eta_3)\cdot B.$$

$$\therefore\ B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{B_1^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{B_2}$$

$B_1 B = B_2$

$$(B_1, B_2) \xrightarrow{\text{行}} (E, B_1^{-1}B_2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. 在 $P^{2\times 2}$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}_1(X)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}X,\qquad \mathscr{A}_2(X)=X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{A}_3(X)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

求 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

解: $A_1 E_{11}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21}$

$A_1 E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22}$

$A_1 E_{21}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}=bE_{11}+dE_{21}$

$A_1 E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=bE_{12}+dE_{22}$

∵ A在 $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{22}$ 下的基为

?

3张焕域.

同理. 求得 A_2. A_3 在 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵。

特别注意. 这里的"同理"要有过程!!

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

1）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵；

2）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵，其中 $k\in P$ 且 $k\neq 0$；

3）求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

10. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $\mathscr{A}^{k-1}\xi\neq\mathbf{0}$，但 $\mathscr{A}^{k}\xi=\mathbf{0}$，求证 $\xi,\mathscr{A}\xi,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\xi\,(k>0)$ 线性无关.

找同学推导：同一变换在不同基下的矩阵. 理解 $X^{-1}AX$.

9. 解：$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$.

则 $\mathscr{A}(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)\cdot A_1$ $\quad(\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

$\mathscr{A}(\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot A_2$ $\quad(\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A_3.$ $\quad(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A_1=\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

10. 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换，如果$\mathscr{A}^{k-1}\xi\neq 0$，但$\mathscr{A}^{k}\xi=0$，求证$\xi,\mathscr{A}\xi,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\xi\ (k>0)$线性无关.

不能用数学归纳法.

$k=1$时，向量组为$\xi\neq 0$，故线性无关.

假设$k=n$时，结论成立，即 $\xi,\cdots,A^{n-1}\xi$ 无关 $\Leftarrow A^{n}\xi=0$

$\Leftarrow A^{n+1}\xi=0$

解：设 $\underbrace{l_0\xi+l_1A\xi+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\xi}_{②}=0$

则 $A^{k-1}(l_0\xi+\cdots+l_{k-1}A^{k-1})$

$=l_0A^{k-1}\xi+l_1A^{k}\xi+\cdots+l_{k-1}A^{2k-2}$

$=l_0A^{k-1}\xi=0$

$A^{k-1}\xi\neq 0 \quad \therefore l_0=0$

由 $A^{k-2}(②)=l_0A^{k-2}\xi+l_1A^{k-1}\xi+l_2A^{k}\xi+\cdots$

$=0+l_1A^{k-1}\xi+0=0$

$\therefore l_1=0$.

依次类推，考虑 $A^{k-3}(②),\cdots,A(②),E(②)$.

得 $l_2=l_3=\cdots=l_{k-1}=0$.

$\xi,A\xi,\cdots,A^{k-1}\xi\ (k>0)$ 线性无关.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_0\\l_1\\l_2\\\vdots\\l_{k-1}\end{pmatrix}=0$$

10. 设$\mathscr{A}$是线性空间 V 上的线性变换,如果$\mathscr{A}^{k-1}\xi\neq\mathbf{0}$,但$\mathscr{A}^{k}\xi=\mathbf{0}$,求证 $\xi,\mathscr{A}\xi,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}\xi(k>0)$线性无关.

11. 在 n 维线性空间中,设有线性变换$\mathscr{A}$与向量ξ,使得$\mathscr{A}^{n-1}\xi\neq\mathbf{0}$,但$\mathscr{A}^{n}\xi=\mathbf{0}$,求证$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. 证明: 设 $(A\varepsilon_1, A\varepsilon_2, \cdots, A\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}, \quad i=1, \cdots n-1.$

$A\varepsilon_n = 0.$

令 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n) = (\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi)$. 线性无关,为基.

则 $A(\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi) = (\xi, \cdots, A^{n}\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ D