回顾：线性变换在一组基下的矩阵

$\sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \cdot A$

线性变换在不同基下的矩阵

引入 矩阵的相似：$A \sim B \Leftrightarrow \exists$ 可逆 P. s.t. $P^{-1}AP = B$.

RK：这一章很重要！

★ 相似不变量/性（相似的矩阵共有的性质或相同的特征量）

1. 特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda E - A|$$
$$= (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}, \quad \lambda_i \text{ 两两不同}$$
$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

2. 特征值：$\underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_1}_{n_1}, \cdots, \underbrace{\lambda_s, \cdots, \lambda_s}_{n_s}$

① 秩：$R(A)$ ↪ 非退化/可逆性

这里课上讲得不对，见注.

② 行列式：$|A| = \prod \lambda_i = (-1)^n a_0$

③ 迹：$trA = \sum \lambda_i = \sum a_{ii} = -a_{n-1}$

…… $f(\lambda)$ 中的系数 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 都是，

系数的线性组合等都是相似不变量.

④ 特征值 λ_i 的代数重数：n_i

⑤ 特征值 λ_i 的几何重数：$m_i = \dim V_{\lambda_i}$

$V_{\lambda_i} = \{\alpha \in P^n \mid (\lambda E - A)\alpha = 0\}$

注：秩：$R(A)=\underbrace{n-n_0}_{\text{非零特征值个数}}+\underbrace{n_0-m_0}_{\text{0特征值的代重－几重}}=n-m_0$ （n减0特征值的几何重数）

☆：$R(A)\neq$ 非零特征值个数.

特征值可以组合出这么多相似不变量，那么：

问题：特征值是相似关系的完全不变量吗？
（换言之，$A\sim B \Leftrightarrow A、B$ 特征值完全一样，对吗？）

这里可以留一页空白，接下来的学习会接触新的相似不变量.

命题：$1\leq m_i\leq n_i\leq n$，（几重≤代重）

分析：$n=\sum n_i$，$\Rightarrow n_i\leq n$.

$V_{\lambda_i}\neq\{0\}$. $\Rightarrow m_i\geq 1$.　（提问，$V_{\lambda_0}=V \Leftrightarrow \overset{\text{数乘变换}}{A}=\lambda_0 E$）

下面只证 $m_i\leq n_i$

证明：取 V_{λ_i} 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m_i}$，并扩充为全空间一组基.
$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m_i},\ \alpha_{m_i+1},\ \cdots,\alpha_n$.

则 考虑 σ 在这组基下的矩阵 (提问).

$$\sigma(\alpha_1,\cdots,\alpha_{m_i},\alpha_{m_i+1},\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_i E^{m_i} & B_1\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$$

令 $B=\begin{vmatrix}\lambda_i E & B_1\\ 0 & B_2\end{vmatrix}$, 则 B 与原矩阵 A 相似, 有相同特征多项式.

$$\because\ f(\lambda)=|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}(\lambda-\lambda_i)E & -B_1\\ 0 & \lambda E-B_2\end{vmatrix}$$

$$=|(\lambda-\lambda_i)E|\cdot|\lambda E-B_2|$$

$$=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\cdot|\lambda E-B_2|$$

$\therefore\ n_i\geq m_i$ ☒

例: Jordan 块.

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & 0\\ 1 & \lambda_0 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1\ \ \lambda_0\end{pmatrix}.$$

回忆 P_{133}. 2-8: 求 J^n.

$J=\lambda_0E+B$,

$$B=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1\ \ 0\end{pmatrix}$$ (对比本章习题1).

$B^n=0$, 对 $(\lambda_0E+B)^n$ 二项式展开, 可求 J^n.

J的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-J|=(\lambda-\lambda_0)^n$$

特征值为 $\lambda=\lambda_0$.

$$(\lambda_0E-J)X=-BX=0.$$

$r(B)=n-1$, $Be_n=0$, $e_n=(0,\cdots,0,1)^T$.

$\Rightarrow V_{\lambda_0}=L(e_n)$.

$\therefore$ λ_0的几何重数为1, 代数重数为n. □

答：特征值不是完全不变量。

λ_0E 与 J 有相同特征值，但不相似.

又问：复方阵相似的完全不变量为什么？

(答：Jordan标准形，下一章将学)

定理14. 任一复方阵A与一Jordan矩阵相似.

$$A \sim diag(J_1,\cdots,J_t).$$ (对角块矩阵).

注：λ_i的代数重数 = λ_i对应Jordan块的阶数之和.

λ_i的几何重数 = λ_i对应Jordan块的个数.

注：定理12中直和分解：

$$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s,\quad \leftarrow\quad f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$$

最细 $W_1\oplus\cdots\oplus W_t$.

几何重数之和 = V分解为最细分解的σ-不变子空间个数.

特征值是可对角化矩阵的相似完全不变量.

(A可对角化, 则 $A \sim B \Leftrightarrow$ A和B有完全一样特征值)

★. 矩阵的可对角化. (A可对角化, ∃可逆P. s.t $P^{-1}AP$为对角阵)

A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关特征向量 $\Leftarrow$ A有n个不同特征值.

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}^n$为A特征子空间之和.

$\Leftrightarrow$ 代重=几重. $\forall \lambda_i$

$\Leftrightarrow$ $(\lambda_i E - A)X = 0$ 与 $(\lambda_i E - A)^2 X = 0$ 同解. $\forall \lambda_i$

$\Leftrightarrow$ $r(\lambda_i E - A) = r[(\lambda_i E - A)^2]$, $\forall \lambda_i$

(对比 P290 - 12题).

$\Leftrightarrow$ A的极/最小多项式无重根

$\Leftrightarrow$ A的初等因子都是一次的.

$\Leftrightarrow$ ...... (可留一页空白).

$\Leftarrow$ 实对称矩阵. $\Leftarrow$ 相似于实对称矩阵.

初门.

A 和 A^*

吴方班高代习题课

2022 年 4 月 20 日

引理 1. 已知 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵，则当 $r(A) = n$ 时，$r(A^*) = n$；当 $r(A) = n-1$ 时，$r(A^*) = 1$；$r(A) \leq n$ 时，$r(A^*) = 0$。

引理 2. A^* 可以写成 A 的多项式，即存在多项式 $g(x)$ 使得

$$A^* = g(A).$$

证明：

$$A^*A = |A| \cdot E \tag{1}$$

另一方面，根据 Hamilton-Cayley 定理知道：

$$f(A) = A^n + \mathrm{a}_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \mathrm{a}_1 A + \mathrm{a}_0 E = 0.$$

其中 $f(x) = |xE - A|$ 为 A 的特征多项式，$\mathrm{a}_0 = (-1)^n |A| \cdot E$。所以

$$(-1)^{n+1}(A^{n-1} + \mathrm{a}_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \mathrm{a}_1 E) \cdot A = |A| \cdot E \tag{2}$$

对比（1）和（2），当 A 可逆时，有

$$A^* = (-1)^{n+1}(A^{n-1} + \mathrm{a}_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \mathrm{a}_1E) = g(A) \qquad (3)$$

其中 $g(x) = (-1)^{n+1}(x^{n-1} + \mathrm{a}_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \mathrm{a}_1)$.

利用摄动法，考虑 $(kE + A)^*(kE + A) = |kE + A| \cdot E$，可证 A 不可逆时，A^* 仍可表示为 A 的多项式，具体表达式同 (3)。 □

问题. 取定数域 $\mathbb{F}$ 上的 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵 A。设

- 特征多项式为

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i) = x^n + \mathrm{a}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \mathrm{a}_1x + \mathrm{a}_0;$$

- A 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的特征值为 $\{\lambda_i\}_{i=1,2\cdots n}$；
- α_i 为特征值 λ_i 对应的某个任意取定的特征向量。

其中 n_i 和 m_i 分别为 λ_i 的代数重数和几何重数。

讨论 A 和 A^* 的特征值，特征向量和特征多项式之间的关系。

情况 **1**. 当 $r(A) = n$ 时，A 的所有特征值非零。A^{-1} 存在，且易知 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda_i}, i = 1, 2\cdots n$。设 A^* 的特征值为 $\mu_k, k = 1, 2\cdots n$。

则

$$0 = |\mu E - A^*| = |\mu E - |A|A^{-1}| = |A|^n \cdot |\frac{\mu}{|A|}E - A^-|$$

所以 $\frac{\mu_i}{|A|}=\frac{1}{\lambda_i}$，知

$$\mu_i=\frac{|A|}{\lambda_i}=\frac{\prod\lambda_k}{\lambda_i}=\prod_{k\neq i}\lambda_k$$

A^* 的特征多项式为

$$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\mu_i).$$

下面说明 A 和 A^* 有相同的特征向量。

由 $|A|\alpha_i=A^*A\alpha_i=A^*(\lambda_i\alpha_i)=|A|\alpha_i$，知

$$A^*\alpha_i=\frac{|A|}{\lambda_i}\alpha_i$$

即 A 的任一特征向量 α_i 都是 A^* 的特征向量。

又设 β 为 A^* 的对应任一 μ_k 的任意特征向量，则 $|A|\beta=AA^*\beta=A(\mu_k\beta)$，则得 $A\beta=\frac{|A|}{\mu_k}\beta=\lambda_k\beta$，即 β 为 A 的特征向量。

这就说明了 A 和 A^* 具有相同的特征向量。需要强调的是: 这里找出了 A^* 的全部特征向量，即$\{\alpha_i\}$ 为 A^* 的对应特征值 μ_i 全部特征向量。

补充: 如果 A 和 B 具有相同的特征向量，则 A 和 B 可以同时化为 Jordan 标准形，即存在可逆 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$

同时为 Jordan 标准形。特别地，若 A 和 B 中其中一个可对角化，则 A 和 B 具有相同的特征向量意味着 A 和 B 可同时对角化。矩阵的同时对角化问题是一个很有意思的问题。

情况 2. 当 $r(A)=n-1$ 时，$r(A^*)=1$。所以 A 至少有一个特征值为零，不妨设 $\lambda_1=0$，其他特征值设为 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；$A^*$ 至少有 $n-1$ 个特征值为零。不妨设 $i\geq 2$ 时，$\mu_i=0=\prod\limits_{k\neq i}\lambda_k$，

下求 μ_1

$$f(x)=|xE-A|=x^n+\mathrm{a}_{n-1}x^{n-1}\cdots+\mathrm{a}_1x+\mathrm{a}_0,\ \text{其中}\ \mathrm{a}_0=0$$

则根据引理 2，

$$A^*=((-1)^{n+1}(x^{n-1}+\cdots+\mathrm{a}_1))|_{x=A}$$

$\lambda_1=0$ 为 A 的特征值,故 A^* 有特征值 $(-1)^{n+1}(x^{n-1}+\cdots+\mathrm{a}_1)|_{x=0}=(-1)^{n+1}\mathrm{a}_1=\sum\limits_i\prod\limits_{k\neq i}\lambda_i=\prod\limits_{i=2}^n\lambda_i=\mu_1$。

所以 $\mu_i=\prod\limits_{k\neq i}\lambda_i$ 给出 A^* 的所有特征值。

A^* 的特征多项式,

$$F(x)=\prod_{i=1}^n(x-\mu_i)=x^n-\mu_1x^{n-1}$$

下面我们求 A^* 的特征向量。

$r(A^*)=1$，不妨 $A_{11}\neq 0$，令 $A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)$，由 $A^*A=|A|E=0$ 知 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 都为齐次线性方程组 $A^*X=0$ 的解。

由 $A_{11}\neq 0$ 和 $r(A)=n-1$ 知 A 除去第 1 列剩余的 $n-1$ 列 $\{\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 线性无关。所以,由 $A^*\beta=0\beta=0$,知 A^* 关于 0 的特征向量为任意 $\beta\in L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)-\{0\}$, 即任意 $\beta=\mathrm{k}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{k}_n\alpha_n$, $\mathrm{k}_2,\cdots,\mathrm{k}_n$ 不同时为 0 都为 A^* 关于特征值 0 的特征向量.

另一方面，$r(A^*)=1,A_{11}\neq 0$，则 A^* 可写为（注意由 A^* 的定义，$(A_{11},A_{21},\cdots,A_{n1})$ 为 A^* 的第一行，而非第一列。）

$$A^*=\begin{pmatrix}1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\end{pmatrix}$$

则

$$
\begin{aligned}
A^* \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= (A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1}) \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= tr(A^*) \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

所以，$(1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 为 A^* 关于特征值为 μ_1 的特征向量。

情况 **3**. 当 $r(A) < n-1$ 时，$A^* = 0$。A^* 的 n 个特征值都为 0，任意 n 维非零向量 α 都为 A^* 关于 $\mu = 0$ 的特征向量，而 A^* 的特征

多项式为 $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \mu_i) = x^n$.