从 Jordan 标准形再探不变子空间

吴方班–高等代数习题课

山东科技大学

2022 年 5 月 31 日

主要内容：两个思考题

$\sigma : V \to V$ 为 n 维复线性空间 V 上的线性变换；
A 为 σ 在某组基下的复矩阵.

主要内容：两个思考题

$\sigma : V \to V$ 为 n 维复线性空间 V 上的线性变换；
A 为 σ 在某组基下的复矩阵.

两个思考题：

- σ 的不变子空间；
- A 相似其 Jordan 标准形的过渡矩阵.

常见的不变子空间

1) V 和 $\{0\}$.
2) $\ker\sigma$ 和 $\mathrm{im}\ \sigma$.

$$\ker\sigma=\{X\in V\mid \sigma(X)=0\}\quad \mathrm{im}\ \sigma=\{\sigma(X)\mid X\in V\}$$

3) 特征子空间及其子空间

$$V_\lambda=\ker(\lambda\cdot id-\sigma)$$

4) 根子空间

$$V^\lambda=\ker(\lambda\cdot id-\sigma)^n$$

5) 不变子空间的和（直和）、交
6) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则 V_σ、$\ker\sigma$ 和 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 都为 τ-子空间

常见的不变子空间

1) V 和 $\{0\}$.
2) $\ker\sigma$ 和 $\mathrm{im}\ \sigma$.

$$\ker\sigma = \{X \in V \mid \sigma(X) = 0\} \quad \mathrm{im}\ \sigma = \{\sigma(X) \mid X \in V\}$$

3) 特征子空间及其子空间

$$V_\lambda = \ker(\lambda \cdot id - \sigma)$$

4) 根子空间

$$V^\lambda = \ker(\lambda \cdot id - \sigma)^n$$

5) 不变子空间的和（直和）、交
6) 若 $\sigma\tau = \tau\sigma$，则 V_σ、$\ker\sigma$ 和 $\mathrm{Im}\ \sigma$ 都为 τ-子空间

问题：上面的 σ-子空间之间有什么联系？
“最小”的 σ-子空间是什么？

主要思路：

1. Jordan 块的情况
2. 唯一特征值的情况
3. Jordan 矩阵的情况
4. 一般复矩阵的情况

Jordan 块的情况 — σ-子空间的不可分解性

习题 (26, Page 222)

复 r 维线性空间 V 上的线性变换 σ 在一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 下的矩阵为一个 Jordan 块 J. 则

1) V 中包含 α_1 的 σ-子空间只有 V 自身;
2) V 中任一非零 σ-子空间都包含 α_r;
3) V 不能分解为两个非平凡的 σ-子空间的直和.

证明思路:

Jordan 块的情况 — 可能的 σ-子空间

设 σ 的唯一特征值为 λ，一个特征向量为 α_r. 则 $B=\lambda E-J$ 是一个幂零阵，$B^r=0$ (B^i 幂次每增加 1 都会多出一个零列). 所以，

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda^0} &= \{X\in V \mid (\lambda E-J)^0X=0\}=\{0\}\\
V_{\lambda^1} &= \{X\in V \mid (\lambda E-J)X=0\}=L(\alpha_r)\\
V_{\lambda^2} &= \{X\in V \mid (\lambda E-J)^2X=0\}=L(\alpha_{r-1},\alpha_r)\\
&\cdots\\
V_{\lambda^r} &= \{X\in V \mid (\lambda E-J)^rX=0\}=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r)\\
&= V_{\lambda^{r+1}}=V_{\lambda^{r+2}}=\cdots=V
\end{aligned}
$$

都为 σ-子空间.（同时也是 $(\lambda\cdot id-\sigma)$-子空间.）

命题

在 *Jordan* 块的情况下，上述 $V_{\lambda^0}, V_{\lambda^1}, \cdots, V_{\lambda^r}$ 给出了 V 的所有的 σ-子空间，并满足

$$\{0\} = V_{\lambda^0} \subset V_{\lambda^1} \subset V_{\lambda^2} \subset \cdots V_{\lambda^{r-1}} \subset V_{\lambda^r} = V_{\lambda^{r+1}} = \cdots = V$$

证明：

Jordan 块的情况 — 不变子空间之间的联系

1) 特征子空间和根子空间

$$V_\lambda = V_{\lambda^1} \qquad V^\lambda = V_{\lambda^r}$$

2) 核和值域
当 $\lambda \neq 0$ 时，σ 为可逆变换，

$$\ker\sigma = \{0\} = V_{\lambda^0}$$
$$\mathrm{im}\ \sigma = V = V_{\lambda^r}$$

当 $\lambda = 0$ 时，

$$\ker\sigma = L(\alpha_r) = V_{\lambda^1}$$
$$\mathrm{im}\ \sigma = L(\alpha_2, \cdots, \alpha_r) = V_{\lambda^{r-1}}$$

3) $V = \ker\sigma \oplus \mathrm{im}\ \sigma$ 当且仅当 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda = 0$，$r = 1$，即 σ 为可逆变换或一阶零变换。

唯一特征值的情况

设 $\sigma: V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的线性变换。σ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为一个 Jordan 矩阵，

$$J = \mathrm{diag}(J_1, \cdots, J_m)$$

其中 $J_1, \cdots, J_m$ 都是特征值 λ 对应的 Jordan 块，m 为 λ 的几何重数，即 σ 关于 λ 的线性无关特征向量的个数。设 Jordan 块 J_j 的阶数为 r_j，不妨进一步设 $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_m$，则 $\sum\limits_j r_j = n$ 为 λ 的代数重数。

V 的 σ-子空间的直和分解

命题

V 可以分为以下 σ-子空间的直和,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$$

其中 V_j 为 Jordan 块 J_j 在 J 所处的行(或列)对应的基向量生成的线性子空间.

证明:

可能的不变子空间

1) 不同 V_j 的 $\sigma|_{V_j}$-子空间的直和为 σ-子空间。共有 $\prod_j (r_j+1)$ 个。
2) 但不是 V 的全部不变子空间。
   例如，数乘变换的任意子空间都是不变子空间。
   事实上，由 σ 的两个线性无关的特征向量的和生成的一维子空间是 σ-不变的，但不属于任何 V_j 的 $\sigma|_{V_j}$-子空间的直和。

设 V_j 为 Jordan 块 J_j 在 J 所处的行（或列）对应的基向量生成的线性子空间，为 $\{\alpha_1^j, \alpha_2^j, \cdots, \alpha_{r_j}^j\} \subset \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$,

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda^0} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^0 X = 0\} = \{0\} \\
V_{\lambda^1} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J) X = 0\} = L(\alpha_{r_1}^1, \alpha_{r_2}^2, \cdots, \alpha_{r_m}^m) \\
V_{\lambda^2} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^2 X = 0\} = L(\alpha_{r_1-1}^1, \alpha_{r_1}^1, \alpha_{r_2-1}^2, \alpha_{r_2}^2, \cdots, \alpha_{r_m-1}^m, \alpha_{r_m}^m) \\
&\cdots \\
V_{\lambda^{r_m}} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^{r_m} X = 0\} = L(\alpha_1^1, \cdots, \alpha_{r_1}^1, \cdots, \alpha_1^m, \cdots, \alpha_{r_m}^m) \\
&= V_{\lambda^{r_m+1}} = V_{\lambda^{r_m+2}} = \cdots = V = L(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\{0\} = V_{\lambda^0} \subset V_{\lambda^1} \subset V_{\lambda^2} \subset \cdots V_{\lambda^{r_m-1}} \subset V_{\lambda^{r_m}} = V_{\lambda^{r_m+1}} = \cdots = V
$$

不变子空间的联系

1) 特征子空间和根子空间

$$V_\lambda = V_{\lambda^1} \qquad V^\lambda = V_{\lambda^n} = V_{\lambda^{r_m}} = V$$

2) 核和值域

当 $\lambda \neq 0$ 时，线性变换 σ 为可逆变换，

$$\ker\sigma = \{0\}$$
$$\mathrm{im}\ \sigma = V$$

当 $\lambda = 0$ 时，

$$\ker\sigma = L(\alpha^1_{r_1}, \cdots, \alpha^m_{r_m}) = V_{\lambda^1}$$
$$\mathrm{im}\ \sigma = L(\alpha^1_2, \cdots, \alpha^1_{r_1}, \cdots, \alpha^m_2, \cdots, \alpha^m_{r_m}) = V_{\lambda^{r_m-1}}$$

3) $V = \ker\sigma \oplus \mathrm{im}\ \sigma$ 当且仅当 $\lambda \neq 0$ 或 $\lambda = 0$，$r_1 = \cdots = r_m = 1$，即 σ 为可逆变换或零变换。

Jordan 矩阵的情况

设 $\sigma: V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的线性变换。设 σ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$ 下的矩阵为一个 Jordan 矩阵，

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{diag}(J_{11}, \cdots, J_{1m_1}, J_{21}, \cdots, J_{2m_2}, \cdots, J_{s1}, \cdots, J_{sm_s}) \\ &= \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_s) \end{aligned}$$

其中 $A_i = \mathrm{diag}(J_{i1}, \cdots, J_{im_i})$ 是特征值 $\lambda = \lambda_i$ 对应的 Jordan 块构成的 Jordan 阵，m_i 为 $\lambda = \lambda_i$ 的几何重数，A_i 的阶数是 $\lambda = \lambda_i$ 的代数重数 n_i。$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同。

V 的 σ-子空间的直和分解

命题

V 可以分为 Jordan 块对应的 σ-子空间的直和,

$$V = V_{11} \oplus \cdots \oplus V_{1m_1} \oplus V_{21} \oplus \cdots \oplus V_{2m_2} \oplus \cdots \oplus V_{s1} \oplus \cdots \oplus V_{sm_s}$$

其中 V_{ij} 为 Jordan 块 J_{ij} 在 J 所处的行(或列)对应的基向量.

根据习题 26,这是一个最细的直和分解.

命题 (定理 12,Page 211)

V 也可以分为特征值对应的 σ-子空间的直和,

$$V = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_s$$

其中 $\mathcal{V}_i = V_{i1} \oplus \cdots \oplus V_{im_i}$ 也是 σ-子空间。

设 V_{ij} 为 Jordan 块 J_{ij} 在 J 所处的行（或列）对应的基向量，为 $\{\alpha_1^{i,j}, \alpha_2^{i,j}, \cdots, \alpha_{r_{ij}}^{i,j}\} \subset \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$，

$$
\begin{aligned}
V_{\lambda_i^0} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^0 X = 0\} = \{0\} \\
V_{\lambda_i^1} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J) X = 0\} = L(\alpha_{r_{i1}}^{i,1}, \cdots, \alpha_{r_{im_1}}^{i,m_i}) \\
V_{\lambda_i^2} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^2 X = 0\} = L(\alpha_{r_{i1}-1}^{i,1}, \alpha_{r_{i1}}^{i,1}, \cdots, \alpha_{r_{im_1}-1}^{i,m_i}, \alpha_{r_{im_1}}^{i,m_i}) \\
&\cdots \\
V_{\lambda_i^{r_{m_i}}} &= \{X \in V \mid (\lambda E - J)^{r_{m_i}} X = 0\} = L(\alpha_1^{i,1}, \cdots, \alpha_{r_1}^{i,1}, \cdots, \alpha_1^{i,m_i}, \cdots, \alpha_{r_m}^{i,m_i}) \\
&= V_{\lambda_i^{r_{m_i}+1}} = V_{\lambda_i^{r_{m_i}+2}} = \cdots = \mathcal{V}_i = L(\epsilon_{i1}, \cdots, \epsilon_{in_i})
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\{0\} = V_{\lambda_i^0} \subset V_{\lambda_i^1} \subset V_{\lambda_i^2} \subset \cdots V_{\lambda_i^{r_{m_i}-1}} \subset V_{\lambda_i^{r_{m_i}}} = V_{\lambda^{r_{m_i}+1}} = \cdots = \mathcal{V}_i
$$

其中 r_{m_i} 为 $\lambda = \lambda_i$ 对应阶数最大 Jordan 块的阶数。

1) 特征子空间和根子空间

$$V_\lambda = V_{\lambda^1} \qquad V^{\lambda} = V_{\lambda^n} = V_{\lambda^{r_m}} = V$$

2) 核和值域

当 $\lambda_i \neq 0$ 时，$\sigma_i = \sigma|_{\mathcal{V}_i}$ 为可逆变换，

$$\ker \sigma_i = \{0\}$$
$$\text{im } \sigma_i = \mathcal{V}_i$$

当 $\lambda_i = 0$ 时，

$$\ker \sigma_i = L(\alpha_{r_{i1}}^{i,1}, \alpha_{r_{i2}}^{i,2}, \cdots, \alpha_{r_{im_i}}^{i,m_i}) = V_{\lambda_i^1}$$
$$\text{im } \sigma_i = L(\alpha_2^{i,1}, \cdots, \alpha_{r_{i1}}^{i,1}, \cdots, \alpha_2^{i,m_i}, \cdots, \alpha_{r_{m_i}}^{i,m_i}) = V_{\lambda^{r_m - 1}}$$

3) $V = \ker \sigma \oplus \text{im } \sigma$ 当且仅当特征值 0 对应的线性变换为零变换，即 $\lambda = 0$ 的代数重数等于几何重数.

一般复矩阵的情况

设 $\sigma : V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的线性变换。设 σ 在一组基 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵为 A。我们总可以取 V 的另外一组基 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$，使得 σ 在这组基下的矩阵为一个 Jordan 矩阵 J。设由 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 到 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ 的过渡矩阵为 P，则

$$P^{-1}AP = J$$

所以只需要考虑一般 Jordan 矩阵的情况即可。

$V = \ker\sigma \oplus \mathrm{im}\ \sigma$ 的成立条件.(对比定理 11，Page 208)

定理

设 $\sigma : V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的线性变换。则 $V = \ker\sigma \oplus im\ \sigma$ 当且仅当 σ 的特征值 0 的代数重数等于几何重数。

推论

设 $\sigma : V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的可对角化线性变换，则 $V = \ker\sigma \oplus im\ \sigma$。

推论

设 $\sigma : V \longrightarrow V$ 为复 n 维线性空间上的幂等线性变换，则 $V = \ker\sigma \oplus im\ \sigma$。

相似 Jordan 标准形的过渡矩阵

习题 (循环子空间，10& 11, Page 220)

设 σ 为 n 维线性空间 V 上的线性变换，若 $\sigma^{n-1}(\xi) \neq 0$，但 $\sigma^{n}(\xi) = 0$. 则 $\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi)$ 为 V 的一组基，且 σ 在这组基下的矩阵为 *Jordan* 块

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定义 (广义特征向量)

若存在非零向量 $\beta \in V$ 和正整数 k 使得

$$(\lambda E - A)^k \beta = 0$$

则称 β 为 A 的关于特征值 λ 的广义特征向量.

设复 n 阶矩阵 A 与 Jordan 块 J 相似，则 A 恰好有 n 个线性无关的广义特征向量 $\beta_1, \cdots, \beta_n$，使得

$$P^{-1}AP = J$$

其中 $P = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$.

命题

任一复 n 阶矩阵 A 都有 n 个线性无关的广义特征向量，这些向量给出了 A 相似其 *Jordan* 标准形的过渡矩阵.

习题 (6(7), Page 243)

求下列矩阵相似 *Jordan* 标准形的过渡矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

思考题

设 A 是一个数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵，我们知道特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上的每个不可约因式都决定了一个友矩阵，则 A 相似于对角块为友矩阵的准对角块矩阵。请问这里的过渡矩阵 P 怎么求？

谢谢大家！欢迎讨论！