阿里巴巴第七题

吴方班高代习题课

阿里巴巴第 7 题：$V = \mathbb{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，$e_i, i = 1, \cdots, n$ 为 V 的一组标准正交基。对 V 中的非零向量 v，定义线性变换 $s_v : V \longrightarrow V$ 为

$$s_v(u) = u - \frac{2(u,v)}{(v,v)}, \forall u \in V.$$

对于介于 0 和 n 之间的整数 k, 记 $Gr_k(V)$ 为 V 的 k 维子空间的集合。对于 V 的一个 k 维子空间 W，记 $[W]$ 为 $Gr_k(V)$ 中的相应元素。取 W 的一组标准基 $\{v_1, \cdots, v_k\}$，定义 $s_{[W]} : V \longrightarrow V$ 为

$$s_{[W]} = s_{v_1} \cdots s_{v_k}.$$

(1) 证明 $s_{[W]}$ 不依赖于标准正交基 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 的选取；

(2) 证明 $s_{[W]}^2 = \mathrm{id}$；

(3) 对 $[W'] \in Gr_k(V)$, 定义

$$t_{[W]}([W']) = [s_{[W]}(W')]$$

其中 $s_{[W]}(W')$ 是 W' 在 $s_{[W]}$ 下的像。我们称 $Gr_k(V)$ 的子集 X 为一个“有趣集”，若

$$t_{[W]}([W']) = [W'], \forall [W], [W'] \in X$$

请找到 $Gr_k(V)$ 中有趣集的最大的元素个数，并证明之。

Solution. （1）设 $v = (x_1, \cdots, x_n)^T$ 是一个单位向量，线性变换 $s_v : V \longrightarrow V$ 在标准正交基 $\{e_i\}$ 下的坐标和矩阵,

$$s_v(e_i) = e_i - \frac{2(e_i, v)}{(v, v)} v = e_i - 2x_i v$$

$$S_v = E - 2vv^T$$

所以,

$$s_{[W]} = s_{v_1} \cdots s_{v_k} = \prod_{i=1}^{k} (E - 2v_i v_i^T) = E - 2\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T$$

取 W 的另外一组标准正交基 $\{w_i\}$，并设 $w_i = k_{i1}v_1 + \cdots + k_{ik}v_k$，

其中 $\sum_j k_{ij}^2 = \sum_i k_{ij}^2 = 1$. 则

$$\begin{aligned}
s_{[W]} &= E - 2\sum_{i=1}^{k} w_i w_i^T \\
&= E - 2\sum_{i=1}^{k} (k_{i1}v_1 + \cdots + k_{ik}v_k)(k_{i1}v_1 + \cdots + k_{ik}v_k)^T \\
&= E - 2\sum_{i=1}^{k} (k_{i1}^2 v_1 v_1^T + \cdots + k_{ik}^2 v_k v_k^T) \\
&= E - 2\left(\sum_{i=1}^{k} k_{i1}^2\right) v_1 v_1^T - \cdots - 2\left(\sum_{i=1}^{k} k_{ik}^2\right) v_k v_k^T \\
&= E - 2\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T
\end{aligned} \tag{1}$$

故 $s_{[W]}$ 不依赖单位正交基的选取。

（2）注意到

$$(E - 2\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T)^2 = E$$

故 $s_{[W]}^2 = \mathrm{id}$。

（3）注意到对任意子空间 W，线性变换 $s_{[W]}$ 的矩阵 $E - 2\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T$ 为一个实对称矩阵，故可以相似正交对角化。即存在正交阵 T 使得

$$T^{-1}AT = diag(x_1, \cdots, x_n) := D$$

由 $s_{[W]}^2 = id$ 知 $x_i = \pm 1, \forall i = 1, \cdots, n$.

对任意 $W = L(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$，$s_{[W]}(W) = \{\alpha \in W \mid D\alpha \in W\} =$

W, 并且此时 W 对应的 $s_{[W]}$ 的矩阵就是对角阵。所以，我们得到了一个包含 C_n^k 个元素的有趣集。

$$X = \{W = L(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \mid \{i_1, \cdots, i_k\} \subset \{e_1, \cdots, e_n\}\}$$

对任意 $W \notin X$，设 W 的一组标准正交基为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 和 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的任意包含 k 个元素的子集都不等价。我们不妨设 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)P = \binom{E_k}{B}$，其中 P 可逆，$B \neq 0$. 不妨 $b_{k+1,1} \neq 0$，则对于 $D_0 = diag(x_1 = 1, \cdots, x_{k+1} = -1, \cdots, x_n)$, 取

$$(\beta_1, \cdots, \beta_k) = (D_0\alpha_1, \cdots, D_0\alpha_k) = D_0 \begin{pmatrix} E_k \\ B \end{pmatrix} P^{-1}$$

则 $(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ 与 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 不等价，因为 $\beta_1 = D_0\alpha_1$ 无法由 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 线性表出. 所以 $W \neq D_0W$.

所以 X 中再加入任意一个 k 维子空间后都不是有趣的.

最后证明任何包含 C_n^k 个有趣集的 Y 都与 X 相差一个可逆变换。因此，有趣集包含的最多元素为 C_n^k.

首先证：对于 k 维线性子空间 W 和 W'，若 $s_{[W]}(W') = W'$, $s_{[W']}(W) = W$，则 $s_{[W]}s_{[W']} = s_{[W']}s_{[W]}$.

$s_{[W]}$ 和 $s_{W'}$ 在一组标准正交基下的矩阵 $S_{[W]}$ 和 $S_{W'}$ 都是实对称矩阵. 故 $s_{[W]}s_{[W']} = s_{[W']}s_{[W]}$ 当且仅当 $S_{[W]}$ 和 $S_{W'}$ 可同时对

角化。取 W 的一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，并扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则 $s_{[W]}$ 在这组基下的矩阵为

$$S_{[W]} = E - 2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\alpha_i^T = diag(-E_k, E_{n-k})$$

且任意 $L(\alpha_i)$ 为 V 的 $s_{[W]}$-不变子空间.

由于 W' 是 $s_{[W]}$ 的不变子空间，所以 W' 可以分解为 $L(\alpha_i)$ 直和的形式，即

$$W' = L(\alpha_{i_1}) \oplus \cdots \oplus L(\alpha_{i_k})$$

则

$$S_{[W]} = E - 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j}\alpha_{i_j}^T = diag(x_1,\cdots,x_n)$$

其中 $x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = -1$, 其余对角元为 1。所以，$s_{[W]}s_{[W']} = s_{[W']}s_{[W]}$。

归纳地，对任意一个具有最多元素的有趣集 Y，对应的线性变换可以同时对角化，并且对角元中有 k 个 -1，$n-k$ 个 1.

另一方面，$W \neq W' \in Y$ 当且仅当他们选取的标准正交基不同，当且仅当对应正交变换的矩阵的对角形 $D \neq D'$.

故 Y 中元素最多为 C_n^k.

（欢迎指正其中可能出现的错误。）