线性代数-10

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. 线性方程组解的存在性

2. 习题课和小测

- 求解线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$：将增广矩阵 (A,β) 作初等行变换化为行最简形，求解行最简形矩阵对应的线性方程组.

引入

- 求解线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$：将增广矩阵 (A,β) 作初等行变换化为行最简形，求解行最简形矩阵对应的线性方程组.
- $$R(A)\le R(A,\beta)\le R(A)+1$$

- 求解线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$：将增广矩阵 (A,β) 作初等行变换化为行最简形，求解行最简形矩阵对应的线性方程组.
- $$R(A)\le R(A,\beta)\le R(A)+1$$
  - 当 $R(A,\beta)=R(A)+1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；

引入

- 求解线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$：将增广矩阵 (A,β) 作初等行变换化为行最简形，求解行最简形矩阵对应的线性方程组.
- $$R(A)\leq R(A,\beta)\leq R(A)+1$$
  - 当 $R(A,\beta)=R(A)+1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；
  - 当 $R(A,\beta)=R(A)=n$ 时，A 列满秩，则方程组有唯一解；

- 求解线性方程组 $A_{m\times n}X_n=\beta_m$：将增广矩阵 (A,β) 作初等行变换化为行最简形，求解行最简形矩阵对应的线性方程组.
- $$R(A)\leq R(A,\beta)\leq R(A)+1$$
    - 当 $R(A,\beta)=R(A)+1$ 时，产生矛盾方程，则方程组无解；
    - 当 $R(A,\beta)=R(A)=n$ 时，A 列满秩，则方程组有唯一解；
    - 当 $R(A,\beta)=R(A)<n$ 时，有自由未知量，则方程组有无穷解.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

秩的应用：判断 $AX = \beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X = \beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R(A, \beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) = n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, \beta) < n$.

推论

齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A) < n$.

秩的应用：判断 $AX=\beta$ 解的存在性.

定理

设 $A_{m\times n}X=\beta$ 为一个非齐次 n 元线性方程组，则方程组

- 无解 $\Leftrightarrow R(A)<R(A,\beta)$;
- 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)$;
  - 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)=n$;
  - 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,\beta)<n$.

推论

齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$.

- 求解 $AX=\beta\Rightarrow$ 通过初等行变换化增广矩阵 (A,β) 为行最简形，判断解的存在性并求解.

例

求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 & = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases}$$

例

设

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 & = 0 \end{cases}$$

讨论 λ 取何值时，方程组有唯一解，无解，无穷解？并在有无穷解时求通解.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.

定理

$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.

1、 矩阵的初等变换和等价, 求可逆 P 使得 $PA = B$, 求 A^{-1}, 求 $A^{-1}B$;

2、 秩的定义、求 $R(A)$;

3、 判断线性方程组 $AX = \beta$ 解的存在性，并求解.

补充：矩阵的秩

1. 设 A 为 n 阶方阵,
   - $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
   - $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^T$, 其中 α,β 为非零列向量

     $\Leftrightarrow A$ 的任意两行（两列）成比例;

   - $R(A)=n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A \sim E$.

补充：矩阵的秩

1. 设 A 为 n 阶方阵，
   - $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
   - $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^T$, 其中 α,β 为非零列向量
     $\Leftrightarrow A$ 的任意两行（两列）成比例;
   - $R(A)=n \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A\sim E$.

2. 设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，若 $R(A)=n$, 则称 A 为列满秩的.
   - $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$;
   - $R(A)=1 \Leftrightarrow A=\alpha\beta^T$, 其中 α,β 为非零列向量 $\Leftrightarrow$ 行列成比例.
   - $R(A_{m\times n})=n \Leftrightarrow A\sim\binom{E_n}{O} \Leftrightarrow A\overset{r}{\sim}\binom{E_n}{O}$;
     $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $PA=\binom{E_n}{O}$.

补充：秩和伴随矩阵

3. 设 A 为 n 阶方阵，则

- $R(A)=n \Leftrightarrow R(A^*)=n, A^*=|A|\cdot A^{-1}, |A^*|=|A|^{n-1}$;
- $R(A)=n-1 \Leftrightarrow R(A^*)=1$;
- $R(A)<n-1 \Leftrightarrow A^*=O$.

4. 分块矩阵的初等变换：若矩阵 A 可逆，令 $r_2 - CA^{-1}r_1$，则

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例 (秩的性质 8)

若 $A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则 $R(A) + R(B) \le n$.

证明：

$$\begin{aligned} R(A) + R(B) &= R\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \le R\begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \\ &= R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= n \end{aligned}$$

作业

- 熟悉前三章中出现的基本概念；
- 掌握各例题中的解题方法和步骤;
- 线上课程进行至当前进度；
- 预习第四章前两节；
- 无书面作业.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 5 日