线性代数-12

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. 最大无关组和向量组的秩

2. 向量组的秩和矩阵的秩

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \cdots, \beta_n$;
矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.

回顾

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \cdots, \beta_n$;
矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\le R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.

回顾

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\le R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.

回顾

向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $B: \beta_1, \cdots, \beta_n$;
矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A, \beta) = R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B) \leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A) = R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A) < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A) = m$.

回顾

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.

回顾

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\leq R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.

回顾

向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, $B:\beta_1,\cdots,\beta_n$;
矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$, $B=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A,\beta)=R(A)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R(B)\le R(A)$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R(A)=m$.
- 部分向量组线性相关 $\Rightarrow$ 整体向量组线性相关.
- 整体向量组线性无关 $\Rightarrow$ 部分向量组线性无关.
- 个数大于维数向量组必线性相关.
- 向量组 A 线性无关，再加向量 β 线性相关 $\Rightarrow$ β 可由向量组 A 线性表示，且表示唯一.

极大无关组

设向量组 $A_0 : \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组, 若

- 向量组 $A_0 : \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

极大无关组

设向量组 $A_0 : \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A : \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组, 若

- 向量组 $A_0 : \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

设向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组，若

- 向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关，

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩，记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

设向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组, 若

- 向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关;
- 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量 (若存在的话) 都线性相关,

则称向量组 A_0 为向量组 A 的一个最大线性无关组 (最大无关组).

- 最大无关组 A_0 和向量组 A 等价.

定义

最大无关组所含向量的个数 r 称为向量组 A 的秩, 记为 R_A 或 $R(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$.

注: 只含零向量的向量组的秩规定为 0.

推论

设向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组, 若

- 向量组 A_0 线性无关;
- 向量组 A 中任意一个向量都可由向量组 A_0 线性表示,

则 A_0 为向量组 A 的一个最大无关组.

推论

设向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组,若

- 向量组 A_0 线性无关;
- 向量组 A 中任意一个向量都可由向量组 A_0 线性表示,

则 A_0 为向量组 A 的一个最大无关组.

例 (例 8)

全体 n 维向量构成的向量组记为 $\mathbb{R}^n$. $e_1, \cdot, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个最大无关组,故 $\mathbb{R}^n$ 的秩为 n.

推论

设向量组 $A_0: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 $A: \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, 的一个部分组, 若

- 向量组 A_0 线性无关;
- 向量组 A 中任意一个向量都可由向量组 A_0 线性表示,

则 A_0 为向量组 A 的一个最大无关组.

例 (例 8)

全体 n 维向量构成的向量组记为 $\mathbb{R}^n$. $e_1, \cdot, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个最大无关组, 故 $\mathbb{R}^n$ 的秩为 n.

- 最大无关组的意义: 无限向量组用有限向量组 (最大无关组) 来表示.

例题 9

例

设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 & = 0 \end{cases}$$

的全体解向量构成的向量组为 S，求 R_S.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

定理 (定理 6)

矩阵的秩 $=$ 它的列向量组的秩 $=$ 它的行向量组的秩.

所以，定理 1-4 中矩阵的秩可以换为向量组的秩：

- 向量 β 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_{(A,\beta)} = R_A$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow R_A = R_{(A,B)}$.
- 向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\Rightarrow R_B \leq R_A$.
- 向量组 B 和向量组 A 等价 $\Leftrightarrow R_A = R_B$.
- 向量组 A 线性相关 $\Leftrightarrow R_A < m$.
- 向量组 A 线性无关 $\Leftrightarrow R_A = m$.

例 (例 10)

设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

例 11

例 (例 11)

向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且 $R_A = R_B$, 证明：向量组等价.

(提示：合并向量组.)

例 (P110：12)

设向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P110：12)

设向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P110：12)

设向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

例 (P110：12)

设向量组 $B:\beta_1,\cdots,\beta_r$ 可由向量组 $A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)K_{s\times r},$$

向量组 A 线性无关. 证明：$R_B=R(K)$.

几点注释：

- 向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow R_B=r\Leftrightarrow R(K)=r$.
- 若 $s=r$, 则 K 为方阵. 此时，向量组 B 线性无关 $\Leftrightarrow K$ 可逆.
- 矩阵描述：$B=AK_{s\times r}$, A 列满秩，则 $R(B)=R(K)$;
  特别地, B 列满秩当且仅当 K 列满秩;
  $s=r$ 时, B 列满秩当且仅当 K 可逆.

小结

- 向量组的秩、最大无关组.
- 求向量组的秩和最大无关组，用最大无关组表示其他向量.
- 向量组的秩和矩阵的秩的关系.

作业

- P110-P111：12、13-(2)、14-(2)、16

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 13 日