线性代数-13

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

本次课内容

1. $AX = 0$ 的解的结构

2. $AX = \beta$ 的解的结构

$$AX = 0 \tag{1}$$

若 $A\xi = 0$, 则称 $X = \xi$ 为方程组 (1) 的解向量.

$$AX = 0 \tag{1}$$

若 $A\xi = 0$, 则称 $X = \xi$ 为方程组 (1) 的解向量.

性质

1. 若 $X = \xi_1, X = \xi_2$ 为 *(1)* 的解向量, 则 $X = \xi_1 + \xi_2$ 也为 *(1)* 的解向量;
2. 若 $X = \xi_1$ 为 *(1)* 的解向量, 则 $X = k\xi_1$ 也为 *(1)* 的解向量.

- 设 S 为 (1) 的全体解向量的集合，$S_0 : \xi_1, \cdots, \xi_t$ 为 S 的一个最大无关组. 则对任意 $c_1, \cdots, c_t$,

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_t\xi_t$$

也为 (1) 的解. 反之，(1) 的解都可以表示为上面形式.

基础解系

- 设 S 为 (1) 的全体解向量的集合，$S_0 : \xi_1, \cdots, \xi_t$ 为 S 的一个最大无关组. 则对任意 $c_1, \cdots, c_t$,

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_t\xi_t$$

  也为 (1) 的解. 反之，(1) 的解都可以表示为上面形式.
- $\xi_1, \cdots, \xi_t$ 称为 (1) 的一个基础解系.

- 设 S 为 (1) 的全体解向量的集合，$S_0 : \xi_1, \cdots, \xi_t$ 为 S 的一个最大无关组. 则对任意 $c_1, \cdots, c_t$,

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_t\xi_t$$

也为 (1) 的解. 反之，(1) 的解都可以表示为上面形式.

- $\xi_1, \cdots, \xi_t$ 称为 (1) 的一个基础解系.
- $t = R_{S_0} = R_S = n - R(A)$, 其中 n 为未知量个数，A 为系数矩阵.

- 设 S 为 (1) 的全体解向量的集合, $S_0: \xi_1, \cdots, \xi_t$ 为 S 的一个最大无关组. 则对任意 $c_1, \cdots, c_t$,

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_t\xi_t$$

也为 (1) 的解. 反之, (1) 的解都可以表示为上面形式.

- $\xi_1, \cdots, \xi_t$ 称为 (1) 的一个基础解系.
- $t = R_{S_0} = R_S = n - R(A)$, 其中 n 为未知量个数, A 为系数矩阵.

定理 (定理 7)

$R(A_{m\times n}) = r$, 则 $AX = 0$ 的解集 S 的秩 $R_S = n - r$.

例 (例 12)

求

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

求解步骤:

1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 得基础解系 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$;
4. 得通解 $X = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$, $\forall c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{R}$.

注

- 基础解系的取法并不唯一.
- 取阶梯列外的对应未知量为自由未知量，方便表示阶梯列对应未知量.
- 自由未知量取值也不唯一. 但取自由未知量的其中一个为 1, 其余为 0，更容易计算基础解系.

例

设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 证明 $R(A)+R(B)\leq n$.

例 14

例

n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 和 $BX = 0$ 同解, 证明 $R(A) = R(B)$.

例

n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 同解, 证明 $R(A)=R(B)$.

- 设矩阵 A, B 同型，则

$$A \sim B \Leftrightarrow R(A)=R(B) \Leftrightarrow AX=0 \text{ 和} BX=0 \text{ 同解}.$$

例

证明 $R(A^TA) = R(A)$.

$$AX = \beta \tag{2}$$

性质

3. 设 $X = \eta_1$ 和 $X = \eta_2$ 为 *(2)* 的解, 则 $X = \eta_1 - \eta_2$ 为对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解.

4. 设 $X = \eta$ 为 *(2)* 的解, $X = \xi$ 为对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解, 则 $X = \eta + \xi$ 仍为 *(2)* 的解.

基础解系

- $X = \eta^*$ 为 (2) 的一个解 (称为特解), $\xi_1, \cdots, \xi_t$ 对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系，则对任意 $c_1, \cdots, c_{n-r}$,

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

都为 (2) 的解. 反之，(2) 的解都可以表示为上面形式.
- (2) 的通解 = 对应齐次线性方程组的通解 +(2) 的一个特解.

例 (例 16)

求解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

求解步骤:

1. 对增广矩阵 (A, β) 进行初等行变换化为行最简形;
2. 写出同解方程组;
3. 取自由未知量全为 0, 解 $AX = \beta$ 得到一个特解 η^*;
4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0, 解 $AX = 0$ 得基础解系 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$;
5. 得通解 $X = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{R}$.

注

- 特解的取法并不唯一，但取自由未知量全为 0，更容易计算.
- 基础解系的取法并不唯一.
- 取阶梯列外的对应未知量为自由未知量，方便表示阶梯列对应未知量.
- 自由未知量取值也不唯一. 但取自由未知量的其中一个为 1, 其余为 0，更容易计算基础解系.

例

求解
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

算法步骤:

1. LU 分解: 将系数矩阵 A 表示为一个单位下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积,
$$A = LU,$$
2. 令 $Y = UX$, 解 $LY = \beta$.
3. 解 $UX = Y$.

小结

- 求解 $AX=0$;
  求解步骤：
  1. 对系数矩阵 A 进行初等行变换化为行最简形;
  2. 写出同解方程组;
  3. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0，得基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$;
  4. 得通解 $X=c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$, $\forall c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}$.
- 求解 $AX=\beta$
  求解步骤：
  1. 对增广矩阵 (A,β) 进行初等行变换化为行最简形;
  2. 写出同解方程组;
  3. 取自由未知量全为 0，解 $AX=\beta$ 得到一个特解 η^*;
  4. 分别取自由未知量其中一个为 1, 其余为 0，解 $AX=0$ 得基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$;
  5. 得通解 $X=c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$, $\forall c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}$.

齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = 0$	$A_{m\times n}X_n = 0$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$
是否有非零解?	$R(A) < n$?	向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性相关?
有非零解	$R(A) < n$	线性相关
有唯一零解	$R(A) = n$	线性无关

- $AX = 0$ 的通解

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}, \forall c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{R}$$

其中 $r = R(A)$.

非齐次线性方程组小结

方程组	矩阵	向量
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$A_{m\times n}X_n = \beta_m$	$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$
是否有解?	$R(A,\beta) = R(A)$?	β 由向量组 $\{\alpha_i\}$ 线性表示?
无解	$R(A,\beta) > R(A)$	No
有解	$R(A,\beta) = R(A)$	Yes
有唯一解	$R(A,\beta) = R(A) = n$ A 列满秩	Yes，且表示唯一
有唯一解 $(m=n)$	$R(A,\beta) = R(A) = n$ A 可逆	Yes，且表示唯一
有无穷解	$R(A,\beta) = R(A) < n$	Yes，且表示不唯一

- $AX = \beta$ 的通解

$$X = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*, \forall c_1, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

作业

- P112-P113：27-(1)、31、32
- (选做) 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{n\times 3}$，$\beta_1,\beta_2$ 齐次线性方程组 $A^TX=0$ 的一个基础解系，令 $B=(\beta_1,\beta_2)_{n\times 2}$.
  证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都为 $B^TX=0$ 的解向量.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 16 日