线性代数-16

主讲：吴利苏

wulisu@sdust.edu.cn

山东科技大学，数学学院

引入

同一个线性变换在基 $e_1, \cdots, e_n$ 和基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的表达式为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为从基 $e_1, \cdots, e_n$ 到基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵. 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 所具有的相同性质和相同数量特征.
- 是否存在一组基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）?
- 是否存在一组标准正交基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）?

同一个线性变换在基 $e_1,\cdots,e_n$ 和基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的表达式为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为从基 $e_1,\cdots,e_n$ 到基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵. 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 所具有的相同性质和相同数量特征.
- 是否存在一组基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵)?
- 是否存在一组标准正交基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵)?

同一个线性变换在基 $e_1, \cdots, e_n$ 和基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的表达式为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为从基 $e_1, \cdots, e_n$ 到基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵. 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 所具有的相同性质和相同数量特征. Section-2. 特征值和特征向量
- 是否存在一组基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）? Section-3. 相似对角化
- 是否存在一组标准正交基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）? Section-4. 对称阵的正交相似对角化

引入

同一个线性变换在基 $e_1, \cdots, e_n$ 和基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的表达式为

$$Y = AX, \qquad Y' = P^{-1}APX',$$

其中可逆矩阵 P 为从基 $e_1, \cdots, e_n$ 到基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的过渡矩阵. 矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 是相似的.

- 相似不变量：矩阵 A 和矩阵 $P^{-1}AP$ 所具有的相同性质和相同数量特征. Section-2. 特征值和特征向量
- 是否存在一组基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）? Section-3. 相似对角化
- 是否存在一组标准正交基，使得线性变换的矩阵 $P^{-1}AP$ 最简单（比如为对角矩阵）? Section-4. 对称阵的正交相似对角化
- Section-4 的应用：Section-5，6，7. 二次型的化简

本次课内容

1. 特征值和特征向量的定义

2. 特征值和特征向量的性质

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

- 有非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$,

$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X,

$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

- 有非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$,

$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X,

$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$ (特征方程)

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.

定义 (特征值和特征向量)

A 为 n 阶方阵, 若存在数 λ 和非零向量 X, 使得

$$AX = \lambda X,$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值(特征根), 非零向量 X 为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

- 有非零向量 X 满足 $AX = \lambda X$,

$\Leftrightarrow$ $(\lambda E - A)X = 0$ 有非零解 X,

$\Leftrightarrow$ $|\lambda E - A| = 0$ (特征方程)

$\Rightarrow$ 特征值都为 $|\lambda E - A| = 0$ 的解.

- 特征多项式: $f(\lambda) = |\lambda E - A|$.

- 代数基本定理：一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

在复数域内有 n 个解 (重根按重数计算).

- 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的 n 个解，则

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

- 代数基本定理：一元 n 次方程

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

在复数域内有 n 个解 (重根按重数计算).

- 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 的 n 个解，则

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

性质

(i) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$;

(ii) $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$;

(iii) A 可逆 $\Leftrightarrow$ A 无零特征值.

求特征向量

设 $\lambda = \lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值，则

$$(A - \lambda_i E)X = 0$$

的任意非零解 $X = P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值，则

$$(A-\lambda_i E)X=0$$

的任意非零解 $X=P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

设 $\lambda=\lambda_i$ 为矩阵 A 的一个特征值，则

$$(A-\lambda_i E)X=0$$

的任意非零解 $X=P_i$ 都为矩阵 A 关于特征值 λ_i 的特征向量.

例 (例 5)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解法：1. 求行列式 $|\lambda E-A|$, 解特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 得特征值;
2. 依次解齐次线性方程组

$$(A-\lambda_i E)X=0$$

得特征值 λ_i 对应的特征向量.

例子

例 (例 6)

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

例 (例 6)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

- λ_i 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X=0$ 的基础解系就是矩阵 A 关于特征值 λ_i 的全体特征向量的一个最大无关组.

例 (例 7)

设 λ 为方阵 A 的特征值，证明：

(1) λ^2 为 A^2 的特征值；

(2) 当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征多项式.

例 (例 7)

设 λ 为方阵 A 的特征值，证明：

(1) λ^2 为 A^2 的特征值；

(2) 当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征多项式.

注： 设 $\phi(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，$\lambda$ 为方阵 A 的特征值.
则 $\phi(\lambda)$ 为 $\phi(A)$ 的特征值.

例 (例 8)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 2$, 求 $A^* + 3A - 2E$ 的特征值和行列式.

定理 (定理 2)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为方阵 A 的 m 个特征值, $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 依次为与之对应的特征向量. 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 互不相同, 则 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 线性无关.

推论

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 分别是关于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量, 则 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关.

例 (例 9)

设 λ_1, λ_2 为方阵 A 的两个不同特征值, 对应的特征向量分别为 P_1, P_2， 证明 $P_1 + P_2$ 不是 A 的特征向量.

相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征多项式相同，从而特征值也相同.

相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征多项式相同，从而特征值也相同.

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

相似矩阵具有相同的特征多项式和特征值

定理 (定理 3)

若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A, B 的特征多项式相同，从而特征值也相同.

推论

若 n 阶矩阵 A 和对角矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 相似，则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

- 若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，则称 A 可以相似对角化(或对角化).

注： 不是所有的 n 阶矩阵都可以相似对角化，比如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

小结

- 相似不变量：特征多项式、特征值、行列式、迹、阶次、秩;
- 相似不变性：可逆.
- 计算特征值和特征向量，计算行列式.
- 下次课：方阵的相似对角化和对称阵的正交相似对角化.

练习

例

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

作业

- 思考题：特征向量是矩阵的相似不变量吗？
- P139：6-(1)、9、13.

欢迎提问和讨论

吴利苏（http://wulisu.cn）

Email: wulisu@sdust.edu.cn

2022 年 10 月 26 日