11.10.

设三阶方阵 A 的特征值为：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，$B=A^3-7A+5E$，

11月10日 ref Page-139: 12、13；lecture-16-slides: 例8

则 $|B|$ 等于（ ）。

A 相似 $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$. $B=\varphi(A)$. ref Page-123.

① $|B|=k_1\cdot k_2\cdot k_3$ 特征值乘积

② λ 为 A 特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 为 $\varphi(A)$ 特征值.

$k_1=\varphi(1)=-1$

$k_2=\varphi(2)=-1$

$k_3=\varphi(3)=11$

$\therefore |B|=k_1\times k_2\times k_3=11$

注：$\varphi(x)=x^3-7x+5$
$=x^3+0\cdot x^2-7x^1+5x^0$

$\therefore \varphi(A)=A^3+0\cdot A^2-7A^1+5A^0$
$=A^3-7A+5E$

而不是 A^3-7A+5.

11.11

2、设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ 是它的 3 个解向量，$\bar{a}_1 = (2,3,4,5)^T, \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = (2,4,6,8)^T$，则该方程组的通解为________ 11.11

考查非齐次线性方程组解的结构

① $AX=0$ 基础解系包含向量个数

$$n - R(A) = 4 - 3 = 1$$

② 若 $R(A) = n-1$，$X = \xi$ 为 $AX=0$ 的一个非零解。

则 $\forall c \in \mathbb{R}$，$c\xi$ 也为 $AX=0$ 的非零解，

即 $c\xi$，$\forall c \neq 0$ 都可作为 $AX=0$ 的基础解系

③ $R(A) = n-1$，则 $AX=\beta$ 通解形式为

$$X = k\xi + \eta^*,\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

取 $\eta^* = \vec{a_1}$　设 $\begin{cases} \vec{a_1} = k_1\xi + \eta^* = \eta^* \\ \vec{a_2} = k_2\xi + \eta^* \\ \vec{a_3} = k_3\xi + \eta^* \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \eta^* = (2,3,4,5)^T \\ \vec{a_2} + \vec{a_3} - 2\vec{a_1} = (k_2+k_3)\xi = (-2,-2,-2,-2)^T \end{cases}$

$\therefore \xi$，$(k_2+k_3)\xi = (-2,-2,-2,-2)^T$，$-\frac{k_2+k_3}{2} = (1,1,1,1)^T$ 都可作为 $AX=0$ 基础解系

(→一定代入数→) $X = k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$\forall k \in \mathbb{R}$.

11.12

2、下列关于矩阵的秩的说法正确的是（ ）

(A) $R(A+B)\overset{\leq}{\geq} R(A)+R(B)$； ×

(B) 若 $R(A)=R(B)$，则 A 与 B 等价； ×， 同型

(C) 合同矩阵的秩相等； √ 11.12等价不变量

(D) 相似矩阵的秩不一定相等。 ×

回顾

① 同型 $A.B$ 等价 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆 P, Q, s.t $PAQ=B$.

$\Leftrightarrow$ $R(A)=R(B)$

② A, B 合同 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆 P. s.t $P^TAP=B$.

③ A, B 相似 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 可逆 P. s.t $P^{-1}AP=B$.

∴ 合同，相似 ⇒ 等价 ⇒ 秩不变.

B 错：A, B 可能不同型，如 $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

C √.

D ×

A：令 $A=B=E$，则 $R(2E)\geq 2R(E) \Leftrightarrow n\geq 2n$ 错误

应为 $R(A+B)\leq R(A)+R(B)$.

2.设 A 为四阶方阵，且 $|A|=2$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}-3A^*\right|=$ ______。 11.13

① $|kA| = k^n|A| \neq k\cdot|A|$

② $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $(\Leftarrow A\cdot A^{-1}=E)$

③ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

④ $|AB| = |A|\cdot|B|$

⑤ $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

$(A^* = |A|\cdot A^{-1})$

⑥ $A^*A = AA^* = |A|\cdot E$

解法1:

$$\left|\left(\tfrac{1}{2}A\right)^{-1} - 3A^*\right|$$

$$\overset{③}{=} |2\cdot A^{-1} - 3A^*|$$

$$\overset{⑤}{=} |2\cdot A^{-1} - 3\times 2\cdot A^{-1}|$$

$$= |-4A^{-1}|$$

$$\overset{①}{=} (-4)^4\cdot|A^{-1}|$$

$$\overset{②}{=} 256\cdot\tfrac{1}{2} = 128.$$

解法2:

$$\left|\left(\tfrac{1}{2}A\right)^{-1} - 3A^*\right|\cdot|A|\cdot\frac{1}{|A|}$$

$$\overset{②④}{=} \left|\left(2A^{-1} - 3A^*\right)\cdot A\right| \times \tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}|2A^{-1}A - 3A^*A|$$

$$\overset{⑥}{=} \tfrac{1}{2}|2E - 3|A|\cdot E|.$$

$$= \tfrac{1}{2}|-4E|.$$

$$\overset{①}{=} \tfrac{1}{2}\times(-4)^4\cdot|E|.$$

$$= 128.$$

11.14

$$D_n=\begin{vmatrix}2+a_1 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2+a_n\end{vmatrix},\ a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

复杂化简单
未知化已知
没见过的化见过的

化 $\begin{cases}\text{低阶行列式}\\ \text{爪形行列式}\ \checkmark\\ \text{Vandermonde行列式}\\ \text{循环行列式}\end{cases}$

解

① $D \xlongequal[r_n-r_1]{r_2-r_1,\ \cdots} \begin{vmatrix}2+a_1 & 2 & \cdots & 2\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$ ← 爪形

$$\xlongequal{c_1+\frac{a_1}{a_2}c_2+\cdots+\frac{a_1}{a_n}c_n} \begin{vmatrix}2+a_1+2\frac{a_1}{a_2}+\cdots+2\frac{a_1}{a_n} & 2 & \cdots & 2\\ 0 & a_2 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

$$=\left(2+a_1+2\frac{a_1}{a_2}+\cdots+2\frac{a_1}{a_n}\right)\cdot a_2\cdots a_n$$

$$=\left(\frac{2}{a_1}+1+2\frac{1}{a_2}+\cdots+2\frac{1}{a_n}\right)a_1\cdot a_2\cdots a_n$$

$$=\left(1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n}a_j$$

解2. $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2+a_1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2+a_n \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

$$\overset{\substack{C_2-C_1 \\ \vdots \\ C_{n+1}-C_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

爪形

$$\overset{r_1+\frac{r_2}{a_1}+\cdots+\frac{r_{n+1}}{a_n}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1+2\frac{1}{a_1}+2\frac{1}{a_2}+\cdots+2\frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & a_1 & & & \vdots \\ 2 & & a_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 2 & \cdots & \cdots & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+2\frac{1}{a_1}+\cdots+2\frac{1}{a_n}\right)\cdot a_1a_2\cdots a_n$$

$$=\left(1+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n}a_j$$

11.15

2、设 $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$AB=A+2B$，求 B。

解矩阵方程

若 $A-2E$ 可逆，

则 $B=(A-2E)^{-1}A$

方法一：先判断 $A-2E$ 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$ 再求 B。（不推荐）

解：$AB=A+2B$

$\therefore (A-2E)B=A$

$\therefore A-2E=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$(A-2E,A)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3\end{array}\right)$$

方法二见左

只可行变换
不可列变换

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&0&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&3&3\\0&1&0&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{E}\ \begin{matrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{matrix}\right)$$

$\because$ $A-2E$可逆，且 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$

6、(12 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$，求正交变换 $x=Py$ 将其化为标准型，并判断该二次型是否为正定二次型？

11.16.

解：二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-1&-2\\0&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

一般情况时，由于这里须对结果因式分解，故建议用降阶法，提醒不推荐用对角线法

$$=(\lambda-2)\cdot((\lambda-1)^2-4)$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\therefore$ $\lambda=-1,2,3$ 为 A 的特征值.

当 $\lambda=-1$ 时，$(-E-A)X=0$

$$(-E-A)=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$\therefore \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 为 $\lambda = -1$ 的特征向量.

当 $\lambda = 2$ 时. $(2E - A)X = 0$

$$2E - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\therefore \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $\lambda = 2$ 的特征向量.

当 $\lambda = 3$ 时. $(3E - A)X = 0$

$$3E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$\therefore \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $\lambda = 3$ 的特征向量.

$\because$ A 为对称阵，$\therefore \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 两两正交.

$\therefore$ 令 $P = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}, \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} \right)$.

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

则 $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$,

$\therefore X = PY$ 时，有

$$f(Y) = Y^T \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} Y = -y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2.$$

正定性判断—方法1.

∵ f 有负特征值，∴ f 不正定.

—方法2.

$2>0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2>0$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0.$$

∴ f 不正定.

1. (14 分) 问 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda.\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解，并在无穷多个解时，求方程组的通解.