11.17

1. (14 分) 问 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3,\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda.\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多个解，并在无穷多个解时，求方程组的通解.

解：增广矩阵

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-(\lambda+1)r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}0 & 1-(\lambda+1)^2 & -\lambda & -3(\lambda+1)\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 0 & -\lambda & \lambda & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 0 & -\lambda & \lambda & \lambda-3\\ 0 & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda & -3(\lambda+1)\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-(\lambda+2)r_2}\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 0 & -\lambda & \lambda & \lambda-3\\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda(\lambda+2) & -3(\lambda+1)-(\lambda-3)(\lambda+2)\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2+3\lambda & \lambda^2+2\lambda-3\end{pmatrix}$$

当 $R(A)=R(A,\beta)=3$ 时，有唯一解.

即，$\lambda\neq0$，$\lambda^2+3\lambda\neq0$，解得 $\lambda\neq0,-3$.

当 $R(A)<R(A,\beta)$ 时无解.

即，$R(A)=1$ 或 2，$\therefore\lambda=0$，或 $\lambda^2+3\lambda=0$.

当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1<R(A,\beta)=2$

当 $\lambda=-3$ 时，$R(A)=R(A,\beta)=2$

$\therefore$ 得 $\lambda=0$.

当 $R(A)=R(A,\beta)<3$ 时，有无穷解.

即，得 $\lambda=-3$.

此时 $(A,\beta) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

令 x_3 为自由未知量.

$x_3=0$ 时，由 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$ 得特解 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$ 非齐次得特解

$x_3=1$ 时 由 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 得基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 齐次得解系.

$\therefore$ 通解为 $X = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

八、证明题（6分）设 $\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，证明：β_1,β_2,β_3 也线性无关。

证明：设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$.

则 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3$

$$=k_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+k_2(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)+k_3(\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3)$$

$$=(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2+2k_3)\alpha_2+(k_1+2k_2+3k_3)\alpha_3$$

$$=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$\therefore$ $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1+k_2+2k_3=0 \\ k_1+2k_3+3k_3=0 \end{cases}$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore$ β_1,β_2,β_3 线性无关.

证2：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$，故可逆.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 β_1,β_2,β_3 线性无关.

3、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&2&3&4\\-2&4&6&5&0\\1&3&2&6&-2\\0&1&1&2&-1\end{pmatrix}$，求其列向量组的一个最大无关组，并把余下的

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&3&4\\-2&4&6&5&0\\1&3&2&6&-2\\0&1&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&3&2&3&4\\0&10&10&11&8\\0&0&0&3&-6\\0&1&1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{3}]{r_2-10r_4}\begin{pmatrix}1&3&2&3&4\\0&0&0&-9&18\\0&0&0&1&-2\\0&1&1&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&3&2&3&4\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&3&2&0&10\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-3r_2}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{matrix}\end{array}$$

行最简

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大无关组.

非零行首1所在列

且 $\begin{cases}\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2\\ \alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2-2\alpha_4\end{cases}$

$\begin{cases}\alpha_3=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\cdot\beta_3\\ \alpha_5=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\cdot\beta_5\end{cases}$

1、设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，E 为 n 阶单位矩阵，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关。

证明：$R(B) \geq R(AB) = R(E) = n$

Page-70.
秩不等式.

$R(B) \leq \min\{m,n\} \leq n$

$\therefore R(B)=n$. 即 B 的列向量组线性无关.

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&-3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，且 A 的列向量组线性相关，则 $t=$ ____。

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

A 列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 不全为零 x_1,x_2,x_3，s.t. $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$

$\Leftrightarrow$ $AX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow$ $R(A)<n$

$\xLeftrightarrow{A为方阵时}$ $|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&-3\\3&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_2+c_3]{}\begin{vmatrix}1&0&-2\\4&t-3&-3\\3&0&1\end{vmatrix}=(t-3)\begin{vmatrix}1&-2\\3&1\end{vmatrix}=0.$$

$\therefore$ $t=3$.

题10分，共40分）

1、计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

降阶法：

解：

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -18 & 0 & -3 & -23 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \\ -18 & -3 & -23 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-18r_1]{r_2+2r_1} -\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 15 & 31 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 15 & 31 \end{vmatrix} = -8\times 31+30=-218$$

（把某行(列)化为只有一个非零元，然后按该行(列)展开，算一个更低阶次行列式。以上最终答案需验证）

4.已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)=2$，则 $\lambda=$______。

初等变换

解1：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&\lambda-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$

$R(A)=2$. $\because \lambda-1=0$. $\lambda=1$.

解2：秩的定义.

$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq0$.

$R(A)=2$.

$\because |A|=0 \Rightarrow \lambda=1$.